POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Enero 2024
Semestre 2024-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Calcula
$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z-1)(z-2)}$$
en donde $\gamma_r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ está dada por $\gamma_r(t) = r\exp(it)$, en los tres siguientes casos:
   (I) $r = \frac{1}{2}$,
   (II) $r = \frac{3}{2}$,
   (III) $r = \frac{5}{2}$.

2. (6 puntos) Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \frac{z^2-4}{z(z-1)^2}$.
   (I) Encuentra los ceros y los polos de f.
   (II) Da los órdenes de los ceros y polos de f.
   (III) Sea $\bar{f}\colon \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}$ la extensión meromorfa de f a la esfera de Riemann. ¿El punto ∞ es un cero o un polo de $\bar{f}$? Calcula su orden.

3. (6 puntos) Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \exp\left(z^3\right)$.
   (I) Da la serie de Taylor de f en 0.
   (II) Calcula $f^{(7)}(0)$, en donde $f^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de f.

4. (6 puntos) Demuestra que $R_0 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, -\pi < \mathrm{Im(z)} < \pi\}$ es biholomorfo al disco unitario $D := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$.

5. (6 puntos) Sea $r > 0$ y $\overline{D_r} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ el disco cerrado de radio r y centrada en 0. Suponga que $f, g : \overline{D_r} \to \mathbb{C}$ son funciones continuas, ambas son holomorfas en el interior de $\overline{D_r}$ y satisfacen

$$|f(z)| = |g(z)|, \ \forall\, |z| = r.$$

Demuestre que si f y g no tienen ceros en $\overline{D_r}$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y $f = \lambda g$.

6. (6 puntos) Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ tal que $f(z) \to \infty$ cuando $z \to \infty$. Demostrar que f es un polinomio.