POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Enero 2024
Semestre 2024-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá numerar cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea L un subconjunto cualquiera de un espacio normado X. Designemos por $C := \overline{\text{span}(L)}$, la cerradura del espacio vectorial generado por L.

   Demuestre que un $x \in X$, pertenece a C si y sólo si $f(x) = 0$, para todo $f \in X^*$ tal que $f|_L = 0$, esto es, para todo $f \in X^*$, tal que $f(y) = 0$, para todo $y \in L$.

   Designamos por X^* el dual de X, esto es el espacio de todos los funcionales lineales continuos definidos en X.

2. Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Toma $x \in X$ y define

$$d = \text{ínf}\{\|x - y\| | y \in M\}$$

   Si $d > 0$ prueba que existe $f \in X^*$ tal que $f(y) = 0$ para toda $y \in M$ y $f(x) = d$.

3. (6 puntos) Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal y acotado. Prueba que si $T(X)$ es cerrado entonces $T^*(Y^*)$ es cerrado con respecto a la norma en X^*.

   Nota: definimos $T^* : Y^* \to X^*$ por $T^*(g)(x) = g(T(x))$. Puedes usar que T^* es un operador lineal acotado.

4. (6 puntos)

   (I) Sea X un espacio vectorial normado y sea Y un subespacio de X. Prueba que si el interior de Y es no vacío entonces $Y = X$.

   (II) Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador acotado. Prueba que si para todo $x \in X$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = 0$ entonces existe $d \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \in X$, $T^d(x) = 0$.

5. (6 puntos) Sea l^2 el espacio de Hilbert de todas las sucesiones de números complejos, $x = (x_1, x_2, \dots)$, cuadrado sumables dotado con producto escalar,

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Definamos el operador T como:

$$Tx := \begin{cases} (Tx)_{2n+1} = 0, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ (Tx)_{2n} = \frac{x_{2n}}{2n}, & n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Demuestre que T es un operador compacto. Además calcula el espectro puntual de $T, \sigma_p(T)$, (esto es el conjunto de todos los autovalores de T) y el espectro de $T, \sigma(T)$.

6. (6 puntos) Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach. Sea T_1 un operador cerrado con dominio $D(T_1) \subset X$, y valores en Y.

Sea T_2 un operador con dominio $D(T_2) \subset X$, y valores en Y, con $D(T_1) \subset D(T_2)$ y tal que para $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < \infty$, fijos,

$$\|T_2 x\| \leq \alpha \|T_1 x\| + \beta \|x\|, \qquad x \in D(T_1). \tag{1}$$

Sea $T := T_1 + T_2$, con $D(T) = D(T_1)$. Demuestre que T es cerrado.

Recuerde que un operador es cerrado si para toda sucesión $x_n \in D(T)$, tal que $x_n \to x \in X, n \to \infty$, y $Tx_n \to y \in Y, n \to \infty$, tenemos que $x \in D(T)$, y $Tx = y$.

Nota. Un operador T_2 que satisface (1) se dice que es relativamente acotado respecto a T_1 con cota relativa menor que uno.