POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Enero 2024
Semestre 2024-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Sea $X = [0,1]$ y $\mathcal{M}$ la σ-álgebra de los Lebesgue medibles. Considera m como la medida de Lebesgue y μ como la medida de conteo en $\mathcal{M}$. Muestra que m es finita y absolutamente continua respecto a μ pero no existe una función f para la cual

$$m(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{M}.$$

¿Esto contradice el Teorema de Radon–Nikodym?

2. (6 puntos) Sean (f_n) y (g_n) sucesiones en $L^1(X,\mu)$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ casi donde sea donde f y g son elementos de $L^1(X,\mu)$. Supongamos que $|f_n| \leq g_n$ c.d. para todo $n \in \mathbb{N}$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X g d\mu.$$

Muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

3. (6 puntos) Un átomo para un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un conjunto medible $A \in \mathcal{M}$ que satisface:

(I) si $\mu(A) > 0$,

(II) se cumple que para cualquier $B \in \mathcal{M}$ con $B \subset A$ sucede que $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \mu(A)$.

Sea μ_F la medida de Lebesgue–Stieltjes asociada a una función creciente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por la derecha.

Muestra que $A = \{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, es un átomo para μ_F si y sólo si F no es continua por la izquierda en t.

4. (6 puntos) Una función monótona f sobre $[a, b]$ se llama singular si $f' = 0$ casi en todas partes.

   (I) Muestre que cada función monótona creciente es la suma de una función absolutamente continua y una función singular.

   (II) Construya una función f que es monótona y continua sobre $[0, 1]$ pero que no es absolutamente continua sobre ningún subintervalo de $[0, 1]$.

   (III) Muestre que existe una función estrictamente creciente singular sobre $[0, 1]$.

5. (6 puntos) Muestre que no se puede remover la hipótesis de que f sea medible con respecto a la medida producto en los Teoremas de Fubini y Tonelli aun en el caso de que se asuma que la medibilidad de f_y y f_x y la integrabilidad de $\int f(x, y)\, d\nu(y)$ y $\int f(x, y)\, d\mu(x)$.

6. (6 puntos) Sea $\mathcal{C}$ una semiálgebra de conjuntos y μ una función de conjuntos no negativa sobre $\mathcal{C}$ con $\mu(\varnothing) = 0$ (si $\varnothing \in \mathcal{C}$). Pruebe que entonces μ tiene una extensión única a una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ generada por $\mathcal{C}$ si las siguientes condiciones se satisfacen:

   (I) Si un conjunto $C \in \mathcal{C}$ es la unión de una colección finita disjunta $\{C_i\}$ de conjuntos en $\mathcal{C}$, entonces $\mu(C) = \sum \mu(C_i)$.

   (II) Si un conjunto $C \in \mathcal{C}$ es la unión de una colección numerable disjunta $\{C_i\}$ de conjuntos en $\mathcal{C}$, entonces $\mu(C) \leq \sum \mu(C_i)$.

   Nota: una familia se subconjuntos $\mathcal{C}$ se llama semiálgebra si satisface las siguientes condiciones

   (a) para todos $A, B \in \mathcal{C}$ se tiene que $A \cap B \in \mathcal{C}$.

   (b) para todo $A \in \mathcal{C}$, el complemento A^c se puede expresar como una unión finita disjunta de elementos de $\mathcal{C}$.