Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2024-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (10 puntos) Sea $M > 1$. Encuentra una solución explícita al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \min\left\{y^2, M\right\}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

¿La solución de este problema es única? ¿Es global? Haz un dibujo de la solución encontrada.

2. (20 puntos) Considera el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-t} - \arctan(y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que existe una única solución $y = y(t)$ de este problema y que la solución es global (definida para cualquier $t \in \mathbb{R}$).

(b) Estudiar la monotonicidad de la solución y.

(c) Calcular los límites de la solución $y = y(t)$ cuando $t \to -\infty$ y $t \to \infty$.

(d) Haz un dibujo de la solución.

3. (20 puntos) Considera el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = (k+3)x + 2y, \\ y' = 2x + ky, \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{R}$.

(a) Encuentra una matriz fundamental del sistema, para todo $k \in \mathbb{R}$.

(b) ¿Cuales son los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que todas las soluciones del sistema satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)?$$

(c) Determina los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que existen soluciones distintas de cero que satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

4. (10 puntos) Considera la solución del sistema no-lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{e^y}{1+e^y}, \\ y' = \cos x, \end{cases}$$

con condición inicial $(x(0), y(0)) = (0, 0)$. Encuéntrala explícitamente y haz un dibujo de la función $y = \phi(x)$ que describe la trayectoria en el retrato de fase. ¿La solución es global? Describe su comportamiento.

5. (20 puntos) Encuentra los valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la solución cero del sistema lineal periódico

$$x' = A(t)x, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & \alpha \\ \beta & \frac{3}{2} + \sin t \end{pmatrix}$$

es inestable.

6. (20 puntos) Considera el sistema no-lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = \left(x^2 + y^2 - R^2\right) y, \end{cases} \tag{1}$$

para $R > 0$.

(a) Encuentra los puntos fijos del sistema para todo $R > 0$.

(b) Linealiza el sistema alrededor de cada punto fijo y determina si los puntos fijos son puntos "silla", nodos estables o inestables, vórtices estables o inestables para el sistema linealizado.

(c) Estudia la estabilidad de los puntos fijos del sistema (1) para $R > 0$.