Examen General de Geometría Algebraica 2024-1.

(FECHA)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelve 4 de 6 ejercicios. Para aprobar el examen es necesario resolver correctamente al menos 3 ejercicios, y para obtener mención honorífica, resolver correctamente los 4 ejercicios.

Todas las variedades están definidas sobre un campo K algebraicamente cerrado. Usaremos $\mathbb{A}^n$ para denotar al espacio afín de dimensión n y $\mathbb{P}^n$ para denotar al espacio proyectivo de dimensión n. $\mathbb{V}(S)$ denotará al conjunto algebraico definido por el conjunto S.

1. Si X denota a la imagen del morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dado por
$$t \mapsto (t^3 - 1, t^2 - 1),$$
¿Son $\mathbb{A}^1$ y X isomorfos? ¿Son racionalmente equivalentes? Justifica tus respuestas.

2. De los siguientes polinomios cuyos conjuntos de ceros determinan curvas afines, decide cuáles son suaves, cuáles se pueden completar a una curva proyectiva plana suave e indique cuántos puntos se tienen que añadir para completar la curva proyectiva.
$$f = x^3 + y^3 - 1, \quad g = y^2 - x^3 - 1, \quad h = y + x^3 + xy^3.$$

3. Si $Y = \{(t^2, t^3, t^5) \,|\, t \in K\} \subset \mathbb{A}^3$,
   (a) demuestra que $P = (0, 0, 0)$ es el único punto singular de Y.
   (b) Encuentra la transformada estricta de Y en P y demuestra que es una curva no singular.

4. Si $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es la función racional de Veronese de grado dos
$$\psi([x : y : z]) = [xy : xz : yz],$$
   (a) encuentra el dominio de definición de ψ,
   (b) demuestra que ψ es birracional y que es su propia inversa,
   (c) encuentra un abierto $U \subset \mathbb{P}^2$ tal que la restricción de ψ a U sea un isomorfismo.

5. Sea $\Sigma_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ la aplicación de Segre $([s : t], [u : v]) \mapsto [su : sv : tu : tv]$.
   (a) Demuestra que está bien definida y determina el ideal que define su imagen $X \subset \mathbb{P}^3$.
   (b) Demuestra que X es una superficie reglada, es decir exhibe una familias de lineas disjuntas que cubren X.

6. Sea $I = (x^2 - y, x^3 - y)$ el ideal que determina la curva cúbica torcida en $V \subset \mathbb{A}^3$.
   (a) Determina el ideal radical $\mathbb{I}(V)$.
   (b) Homogeniza los generadores del ideal I y demuestra que sus homogenizaciones determinan la cerradura proyectiva de $\bar{V} \subset \mathbb{P}^3$.
   (c) ¿Es $\bar{V}$ una intersección completa? ¿Es intersección completa como conjunto? Justifica tus respuesta.

¡SUERTE!