Examen General de Geometría Diferencial 2024-1.

(FECHA)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelve 5 de 6 ejercicios. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario resolver correctamente 3 ejercicios para aprobar el examen y, en ausencia de errores de escritura, contestar correctamente los 5 ejercicios para obtener mención honorífica.

1. (a) Prueba que el subconjunto ($d > 0$)

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 3d^4\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

(b) Prueba que el subconjunto obtenido al cortar M con el plano $z = c$ es una subvariedad, y, teniendo en cuenta que las únicas 1-variedades conexas que existen son difeomorfas a S^1 o a $\mathbb{R}$, describe sus componentes conexas en función de los valores de c. Prueba que M no es compacta.

(c) Prueba que cada recta que pasa por el origen y no es un eje, corta a M en exactamente dos puntos. Deduce que M es difeomorfa a la 2-esfera menos seis puntos.

2. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $\Phi(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) Muestra que $\Phi^{-1}(0)$ no es una subvariedad encajada de $\mathbb{R}^2$.

(b) ¿Se podrá equipar a $\Phi^{-1}(0)$ de alguna topología y estructura suave para volverla una subvariedad inmersa en $\mathbb{R}^2$? Justifica a detalle tu respuesta.

(c) Responde las mismas dos preguntas para la función $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $\Psi(x, y) = x^2 - y^3$.

3. Sea $X \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^n)$ un campo vectorial. Define los campos vectoriales $\widetilde{X}, \widehat{X}, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ como

$$\widetilde{X} := \|x\| X\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \qquad \widehat{X}(x) := X\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \qquad Y(x) := \frac{x}{\|x\|}.$$

(a) Determina el flujo del campo Y.

(b) Calcula $[\widetilde{X}, Y]$ y $[\widehat{X}, Y]$.

4. Sean M una variedad suave de dimensión n y $k \leq n$ un entero positivo. Considera 1-formas diferenciales $\omega_1, \ldots, \omega_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tales que $\omega_1, \ldots, \omega_k$ son linealmente independientes y que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \omega_i = 0.$$

Muestra que existen funciones $A_{ij} \in C^\infty(M)$, $A_{ij} = A_{ji}$, tales que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{k} A_{ij}\omega_j, \quad i = 1, \ldots, k.$$

5. Considera la variedad $(\mathbb{R}^3, g_{eucl})$ con la conexión de Levi-Civita ∇. Define otra conexión $\widetilde{\nabla}$ por

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \varepsilon_{ij}^k \partial_k$$

donde

$$\varepsilon_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \{1,2,3\} \mapsto \{i,j,k\} \text{ es una permutación par,} \\ -1 & \text{si } \{1,2,3\} \mapsto \{i,j,k\} \text{ es una permutación impar,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Muestra que $\widetilde{\nabla}$ es una conexión compatible con g_{eucl}, con las mismas geodésicas que ∇, pero que $\widetilde{\nabla}$ no es simétrica. Verifica que

$$(\widetilde{\nabla}_v X)_p = (\nabla_v X)_p - X_p \times v.$$

(b) Calcula el transporte paralelo de $v = (1,0,0)$ a lo largo de $\gamma(t) = (0,0,t)$.

6. Sea M el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y sea $j : M \to \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica.

(a) Calcula los coeficientes de la métrica inducida por j en la variedad M.

(b) Calcula los coeficientes de Christoffel.

(c) Encuentra la ecuación diferencial de las geodésicas.

(d) Calcula la curvatura seccional.

¡SUERTE!