EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2024-I, ENERO DE 2024

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de un conjunto Ω, definamos

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \cap\{\mathcal{F} \subset 2^{\Omega} \,|\, \mathcal{F} \text{ es una } \sigma - \text{álgebra tal que } \mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}.$$

1.1 Demostrar que $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ es la mínima σ-álgebra tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$.

1.2 Sea $\mathcal{A} = \{[0,1]\} \cup \{[1/2^{n+1}, 1/2^n) \mid n = 0,1,2,\ldots\}$, ¿Cuáles de los siguientes conjuntos pertenecen a $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$?

a) $\{0\}$, b) $\{1\}$, c) $\{1/2\}$, d) $\{1/3\}$, e) $\{0,1\}$,
f) $(1/4,1]$, g) $[0,1/2]$, h) $[1/4,1)$, i) $(0,1/2)$.

Problema 2. Sean (X,Y) y (ξ,η) dos vectores aleatorios tales iguales en distribución, i.e. $(X,Y) \stackrel{d}{=} (\xi,\eta)$, donde $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Demuestre que

$$\mathbb{E}[X \mid Y] \stackrel{d}{=} \mathbb{E}[\xi \mid \eta].$$

Sugerencia: Si $\mathbb{E}[X \mid Y] = f(Y)$ *entonces* $\mathbb{E}[\xi \mid \eta] = f(\eta)$.

Problema 3. Sea $\Omega \neq \emptyset$, $\{A_n\}_{n=1}^N$ una partición de Ω y $(p_n)_{n=1}^N \subseteq [0,1]$ tales que $\sum_{n=1}^N p_n = 1$. Defina $\mathcal{F} = \sigma(\{A_n\}_{n=1}^N)$ y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ la medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ caracterizada por $\mathbb{P}[A_n] = p_n$ para todo $n \in \{1,\ldots,N\}$. Sean $X, \{X_n\}_{n=1}^\infty$ variables aleatorias definidas en este espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

(i) $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.
(ii) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_p} X$, para $p \geq 1$.
(iii) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Problema 4. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con ley *Gamma* de parámetros $(1,a)$ (y media a).

4.1 Pruebe que $S_a = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{X_k}{k^2}$ es una serie convergente casi seguramente.

4.2 Pruebe rigurosamente que

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_a}\big) = \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sinh\sqrt{\lambda}}\right]^a$$

al utilizar la factorización de Euler $\sinh t/t = \prod_{k=1}^\infty (1 + t/k^2\pi^2)$.

4.3 Al utilizar que

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sinh\sqrt{\lambda}} = -1/6$$

y el cálculo de la esperanza de S_1, pruebe que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $\{1,2,3,4\}$ y generador infinitesimal

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para todos los estados i, j, encuentre el límite de las probabilidades $P_t(i,j) = \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i)$, cuando $t \to \infty$.

Problema 6. Un proceso Poisson en la recta real es un proceso puntual $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ caracterizado por completo por las probabilidades

$$\mathbb{P}(N_{(a_i,b_i]} = n_i \,:\, i = 1,\ldots,k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda(b_i - a_i)},$$

donde $N_{(a,b]}$ denota el número de puntos en el intervalo $(a,b]$, y tenemos números reales $a_i < b_i \leq a_{i+1}$, λ real positivo y números enteros no negativos n_i. Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una colección de v.a.i.i.d. con función de distribución F y esperanza finita, independiente del proceso Poisson $\{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Defina un nuevo proceso puntual por $\{Y_i := P_i + X_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ y pruebe que es un proceso Poisson en la recta real. *Sugerencia: Inicie por suponer propiedades muy particulares de F y extienda progresivamente.*

Problema 7. Sea X_t un proceso estocástico y $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ su filtración natural. Demuestre que:

7.1 Si X_t es una martingala respecto a $\mathcal{G}_t$ una filtración entonces X_t es martingala respecto a $\mathcal{F}_t$.

7.2 X_t es martingala respecto a $\mathcal{F}_t$ si y solo si para todo tiempo de paro acotado T, la variable aleatoria X_T esta en L^1 y
$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0).$$

Problema 8. Sea X_t un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^d$.

8.1 Pruebe que para toda $x \in \mathbb{R}^d$ con $\|x\| = 1$, el proceso $x \cdot X_t$ (producto interior) es un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$.

8.2 Pruebe que el inverso no es cierto. *Sugerencia: Sea $B = (B^1, B^2)$ un movimiento Browniano en $\mathbb{R}^2$, y defina el proceso $X_t^1 := B^1_{2t/3} - B^2_{t/3}$ y $X_t^2 := B^2_{2t/3} - B^1_{t/3}$.*