Examen General de Teoría de las Gráficas
enero de 2024

Duración: **4 horas**. Resuelva los siguientes ejercicios. El mínimo aprobatorio es 60% de aciertos, o sea 5 ejercicios completos y correctos. Trate de mostrar todo su conocimiento sobre el tema. En particular, si usa algún teorema del temario de Teoría de las Gráficas, escriba el enunciado completo.

1. Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Sean $F_1 = (V, A_1)$ y $F_2 = (V, A_2)$ bosques generadores de G con $|A_1| < |A_2|$. Demuestre que existe una arista e en $A_2 \backslash A_1$ tal que $F_3 = (V, A_1 \cup \{e\})$ es un bosque generador de G.

2. Sea G una gráfica y $k > 2$. Pruebe si G es k-conexa, entonces para cualesquiera k vértices de G existe un ciclo que contiene a esos k vértices.

3. Una gráfica es plana externa si tiene una inmersión en el plano en la cual todo vértice esta en el borde de la cara externa. Pruebe que una gráfica es plana externa si y solo si **no** contiene como menor ni a K_4 ni a $K_{2,3}$.

4. Pruebe que G tiene una 4-coloración si y solo si G se puede descomponer en la unión de dos subgráficas bipartitas disjuntas por aristas.

5. Sea $t_{r-1}(n)$ el número de aristas de la gráfica de Turán. Pruebe que si $r - 1$ divide a n,
$$t_{r-1}(n) = \frac{n^2}{2}\left(\frac{r-2}{r-1}\right).$$

6. Considere el siguiente juego. El tablero es una gráfica conexa G fija. Dos jugadores toman turnos para construir una trayectoria en G eligiendo alternativamente sus vértices. Si la trayectoria construida hasta el turno k es $v_1, v_2, \ldots v_k$, el jugador en turno tiene que dar un vértice v_{k+1} tal que $v_1, v_2, \ldots v_k, v_{k+1}$ es también una trayectoria. El jugador que ya no pueda mover pierde. Pruebe que G tiene un emparejamiento perfecto si y solo si el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

7. Una sucesión de grados $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ decimos que es hamiltoniana, si toda gráfica G con tal sucesión de grados es hamiltoniana. Pruebe **directamente** que para toda n, si $d_1 \geq n/2$, la sucesión de grados $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ es hamiltoniana. De un ejemplo de una gráfica hamiltoniana cuya sucesión de grados no sea hamiltoniana.

8. Pruebe que el teorema de Ford-Fulkenson implica el teorema de Menger por aristas.