Examen General de Topología Algebraica

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

1. (20 ptos.) Considera el espacio X que resulta de pegar dos copias de la banda de Möbius mediante un homeomorfismo de sus círculos frontera. Demuestra que X es homeomorfo a la botella de Klein y usa la descomposición proveniente de la construcción de X para calcular su grupo fundamental.

2. (20 ptos.) Sean X un espacio topológico y SX su suspensión. Demuestra que para todo n se tiene el isomorfismo $\tilde{H}_n(SX) \cong \tilde{H}_{n-1}(X)$. *Nota: aquí no puedes simplemente decir que ese isomorfismo de suspensión es conocido o que se vio en tu curso, pero sí puedes usar todas las demás propiedades básicas de homología como escisión, la sucesión exacta larga de una pareja y la sucesión de Mayer-Vietoris.*

3. (20 ptos.) Demuestra que si X y Y son espacios arco conexos, localmente arco conexos y semilocalmente simplemente conexos, entonces $X \times Y$ también tiene las mismas tres propiedades.

4. (20 ptos.) Da por cierto el siguiente teorema de Whitehead:

   Teorema. Sea X un complejo CW simplemente conexo. Si X es acíclico, entonces es contráctil.

   Ahora demuestra, usando el teorema anterior, que la esfera de dimensión infinita es contráctil.

5. (20 ptos.) Prueba que existe un complejo CW tal que su grupo fundamental es isomorfo al grupo alternante en 5 letras y todos sus grupos de homología reducida (con coeficientes en $\mathbb{Z}$) son triviales. (Recuerda que la abelianización del grupo alternante en 5 letras es el grupo trivial). Concluye que el espacio que construiste es acíclico pero no es contráctil.