Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2024-1

Instrucciones

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 11. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 6.5 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 10 puntos.

Preguntas:

1. (**2 puntos**) Demuestre que X es conexo si y sólo si toda cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada par de conjuntos $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_n} \in \mathcal{U}$, existe una cantidad finita de conjuntos $U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_{n-1}} \in \mathcal{U}$ tales que $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}} \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

2. **(1.5 puntos)** Sean A el cono topológico sobre $\{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ y B la unión de todos los segmentos de recta en $\mathbb{R}^2$ que unen al punto $(0, 1)$ con los puntos $(n, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ (con la topología relativa usual de $\mathbb{R}^2$). Demuestre que A y B no son homeomorfos.

3. **(2 puntos)** En $\mathbb{Z}^+$, decimos que $U \subset \mathbb{Z}^+$ es abierto si satisface la siguiente condición: si $n \in U$, entonces todo divisor de n pertenece a U.

   a) Demuestre que esto define una topología en $\mathbb{Z}^+$ que no es la topología discreta.

   b) Demuestre que $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ es continua si y sólo si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}^+$, si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$.

4. **(1.5 puntos)** Sea $\{X_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ una colección de espacios segundo numerables. Demuestre que el producto topológico $X = \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n$ es segundo numerable.

5. **(2 puntos)** Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $X_n = \mathbb{R}$ con la topología usual y sea $X = \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n$. Demuestre que X no es σ-compacto (es decir, no es la unión de una colección numerable de subconjuntos compactos).

6. **(2 puntos)** Demostrar que todo espacio metrizable separable es segundo numerable.