Curso 2025-1: Álgebras de Lie

Lara Bossinger

6 CP, martes y miercoles 15:30 - 17:00

Resumen

Un álgebra de Lie, llamada así por el matemático norguedo Sophus Lie, es una estructura algebraica con un corchete de Lie, es decir, existe una conexión antisimétrica que cumple la identidad de Jacobi. Las álgebras de Lie se utilizan principalmente para estudiar objetos geométricos como los grupos de Lie y las variedades diferenciables.

El objetivo de este curso es aprender las bases de la teoría clásica de las álgebras de Lie según, más precisamente el curso incluye los sigientes temas:

1. Teoría general de las álgebras de Lie
2. Álgebras de Lie complejas semisimples
3. Grupos de reflexiones
4. Teorema de Loewner-Whitney
5. Sistemas de raices
6. Representaciones simples de dimensión finita

Definición

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial sobre un cierto campo F junto con una operación binaria

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

llamada *corchete de Lie*, que satisface las propiedades siguientes:

1. es bilineal, es decir, $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]y[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$ para todo $a, b \in F$ y todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
2. satisface la *identidad de Jacobi*, es decir, $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.
3. $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Nota que la primera propiedad y la tercera juntas, implican el carácter anticonmutativo de $[x, y] = -[y, x]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ llamado *anti-simetría* si el campo F es de característica diferente de dos. Además la multiplicación representada por el corchete de Lie no es, en general, asociativa, es decir, $[[x, y], z]$ no necesariamente es igual a $[x, [y, z]]$.

Bibliografía

- James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation theory, Springer, 1980.
- Nicolas Bourbaki, Groupes et alg‘ebres de Lie, vol. 4-6, Masson, 1981.
- Alexander Schrijver, Theory of linear and integer programming, Wiley, 1986.