

## 1 Análisis funcional

### 1.1 Compacidad en espacios de Banach

#### 1.1.1 Compacidad en un espacio métrico

#### 1.1.2 Operadores compactos

#### 1.1.3 Un resultado de compacidad canónica: el teorema de Ascoli

### 1.2 Convergencia débil

#### 1.2.1 Convergencia débil en espacios de Hilbert

#### 1.2.2 Operadores compactos en espacios de Hilbert

#### 1.2.3 Convergencia de estrellas débiles en espacios de Banach

## 2 Espacios de Lebesgue

### 2.1 Estructura del espacio de Banach y reflexividad

#### 2.1.1 Estructura del espacio de Banach

#### 2.1.2 Reflexividad del $L^p$ y compacidad débil

### 2.2 Un resultado de interpolación complejo

#### 2.2.1 El teorema de interpolación de Riesz-Thorin

#### 2.2.2 Extensión de Lebesgue en el espacio-tiempo

### 2.3 Desigualdades para la convolución

#### 2.3.1 Desigualdades para la convolución

#### 2.3.2 Descomposición atómica de espacios $L^p$

#### 2.3.3 Demostración de desigualdades de Young específicas

## 3 Espacios de Sobolev

### 3.1 El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

#### 3.1.1 Definición, estructura hilbertiana y primeras propiedades

#### 3.1.2 El dual de $H^s$

#### 3.1.3 Inmersiones de Sobolev

#### 3.1.4 Corolarios de la inmersión de Sobolev

#### 3.1.5 Compacidad local de la inmersión de Sobolev

#### 3.1.6 El caso de un dominio acotado

### 3.2 El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$

#### 3.2.1 Definición y estructura del espacio de Banach

#### 3.2.2 Inyecciones de Sobolev

#### 3.2.3 Compacidad local de la inyección de Sobolev

#### 3.2.4 El caso de un dominio acotado

## 4 Dispersión en la ecuación lineal de Schrödinger

### 4.1 El grupo de la ecuación lineal de Schrödinger

#### 4.1.1 Resolución explícita

#### 4.1.2 El grupo de Schrödinger

#### 4.1.3 Soluciones débiles

### 4.2 Estimaciones espacio-temporales de Strichartz

## 5 Resolución local y global del problema de Cauchy

### 5.1 El problema local de Cauchy

#### 5.1.1 Contracción estilo Picard

### 5.2 Existencia global

#### 5.2.1 Simetrías y leyes de conservación

#### 5.2.2 Un teorema de existencia global

## 6 Existencia de ondas solitarias

### 6.1 El marco variacional

#### 6.1.1 Espacio $H_{\{r\}}^1$

#### 6.1.2 Un problema de minimización compacta en $H_{\{r\}}^1$

### 6.2 Estudio de minimizadores

#### 6.2.1 Positividad de un minimizador

#### 6.2.2 Ecuación de Euler-Lagrange

#### 6.2.3 Regularidad y unicidad de minimizadores

#### 6.2.4 Clasificación de minimizadores

## 7 Estabilidad orbital de la onda solitaria

### 7.1 Estabilidad orbital de la onda solitaria

#### 7.1.1 Inestabilidad inducida por simetrías

#### 7.1.2 Estabilidad orbital

#### 7.1.3 Caracterización variacional del estado fundamental

#### 7.2.1 Cálculo de $I(M)$

### 7.2 Minimización de energía a masa fija

#### 7.2.2 Clasificación de minimizadores

### 7.3 Descripción de sucesiones minimizadoras

#### 7.3.1 Descripción de la pérdida de compacidad de la inmersión de Sobolev

#### 7.3.2 Compacidad $H^1$ de sucesiones minimizadoras

#### 7.3.3 El lema de concentración de compacidad.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. Allaire et P.-L. Lions : Analyse numérique et optimisation, cours de l'École Polytechnique.
- [2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- [3] J.-M. Bony : Intégration et analyse hilbertienne, cours de l'École Polytechnique, 2006.
- [4] J.-M. Bony : Cours d'analyse (théorie des distributions et analyse de Fourier), Éditions de l'École Polytechnique.
- [5] H. Brézis : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, 1984.
- [6] T. Cazenave et P.-L. Lions : Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. 85, 1982, pages 549–561.
- [7] T. Cazenave : Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10, NYU, CIMS, AMS 2003.
- [8] R. Danchin : Cours de topologie et d'analyse fonctionnelle, Master 1, téléchargeable sur <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/>.
- [9] R. Danchin : Fourier Analysis Methods for PDEs, <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/recherche.html/>.
- [10] R. Danchin : Analyse non linéaire, cours de l'école polytechnique, <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/>, version 2009.
- [11] J. Dixmier : Cours de topologie générale, Presses Universitaires de France.
- [12] L. Evans : Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [13] P. Gérard : Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 3, 1998, pages 213–233.
- [14] B. Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg : Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68, 1979, pages 209–243.
- [15] J. Ginibre et G. Velo : On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, Journal of Functional Analysis, 32, 1979, pages 1–32.
- [16] F. Golse : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles, cours de l'école polytechnique.
- [17] F. Golse et C. Viterbo : Distributions, analyse de Fourier et systèmes dynamiques, cours de l'École Polytechnique.
- [18] T. Hmidi et S. Keraani : Remarks on the blow-up for the  $L_2$  critical Nonlinear Schrödinger equations, SIAM Journal Math. Anal, 38(4), 2007, pages 1035–1370.

- [19] M. Keel and T. Tao : Endpoint Strichartz estimates, *American Journal of Mathematics*, 120, 1998, pages 995–980.
- [20] C. Kenig and F. Merle : Global well-posedness, scattering and blow-up for the energycritical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case, *Invent. Math.*, 166, 2006, pages 645–675.
- [21] D.J. Korteweg et G. de Vries : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag.*, 539, 1895, pages 422–443.
- [22] M.K. Kwong : Uniqueness of positive solutions of  $u \square u + u^p = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ , *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3), 1989, pages 243–266.
- [23] P. D. Lax : Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 1968, pages 467–490.
- [24] E. Lieb et M. Loss : *Analysis*, 2d edition, Graduate studies in Mathematics, 14, AMS.
- [25] P.-L. Lions : The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1, 1984, pages 109–145.
- [26] K. McLeod : Uniqueness of positive radial solutions of  $u + f(u) = 0$  in  $\mathbb{R}^N$ , II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339(2), 1993, pages 495–505.
- [27] F. Planchon : Notes de DEA, <http://www.math.univ-paris13.fr/~fab/enseignement.html> (2003)
- [28] W. Rudin : *Functional analysis*. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [29] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*, 3ème édition. Cours et exercices. Dunod.
- [30] M. Schechter : *Principles of Functional Analysis*, second edition, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.
- [31] S.L. Sobolev : Sur un théorème d’analyse fonctionnelle, *Matematicheskiĭ Sbornik*, 4(46)(3), 1938, pages 471–497.
- [32] R. Strichartz : Restriction Fourier transform of quadratic surfaces and decay of solutions of the wave equations, *Duke Mathematical Journal*, 44, 1977, pages 705–714.
- [33] T. Tao : *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 106. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [34] V.E. Zakharov et A.B. Shabat : Exact theory of two-dimensional self-focusing and onedimensional self-modulation of waves in non-linear media, *Sov. Phys. JETP*, 34, 1972, pages 62—69.