Temas Selectos de Geometría:

Espacios de Sobolev en Variedades Riemannianas

Semestre 2025-1

Es bien sabido que los espacios de Sobolev definidos en $\mathbb{R}^n$ tienen un rol central en varias áreas de las matemáticas, por ejemplo, en el contexto del estudio de ecuaciones diferenciales parciales (EDP's). La construcción de los espacios de Sobolev euclidianos comunmente se aborda en cursos avanzados de Análisis y de Ecuaciones Diferenciales Parciales. Sin embargo es poco abordado el caso en el que los espacios de Sobolev se construyen en variedades riemannianas. Históricamente, la construcción de los espacios de Sobolev en variedades riemannianas no compactas se debe a los trabajos de Thierry Aubin y Cantor en los años 70's, para posteriormente desarrollarse más resultados en los años 80's y 90's del siglo pasado. Se trata de un área de las matemáticas que puede tener muchas aplicaciones y que pocas veces se ve con toda su formalidad y detalle en cursos avanzados de posgrado. El objetivo de este curso es precisamente dar un curso auto contenido en el que los estudiantes interesados puedan obtener los conocimientos para poder manejar estos interesantes espacios a conveniencia. Dado que se trata de un curso auto contenido no es necesario tener conocimiento previo de espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$.

1. Contenido

1. Espacios de Sobolev euclidianos: Derivadas débiles, Definición de Espacios de Sobolev euclidianos, Problemas Elípticos con condicion de forntera.

2. Encajes de Sobolev euclidianos: Desigualdades de Sobolev, El teorema de Rellich-Kondrashov, Valores propios del laplaciano.

3. Repaso de geometría diferencial elemental: Definicion de variedad, de espacio tangente, de conexión y de curvatura.

4. Repaso de geometría riemanniana elemental: Definicion de métrica, conexion riemanniana, curvatura seccional, tensor de Ricci y curvatura escalar, transporte paralelo y geodésica.

5. Orientación; Orientación es espacios vectoriales, orientación en variedades, la forma de volumen riemanniana.

6. Integración en variedades: Integración de formas diferenciales, el teorema de Stokes, integración en variedades riemmanianas, densidades.

7. Espacios de Sobolev en variedades riemannianas: Primeras definiciones, problemas de densidad.

8. Encajes de Sobolev en variedades riemannianas: Primeros resultados, encajes de Sobolev en variedades compactas, convergencia en variedades, encajes de Sobolev en variedades completas.

2. Evaluación del curso

La evaluación será con exposiones individuales de ejercicios que se dejarán a lo largo de las sesiones presenciales, dichas exposiciones formarán a su vez tareas individuales que se deben entregar en las fechas del calendario preestablecido al inicio del semestre.

Referencias

[1] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds.* Monge Ampere Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer- Verlag 252, 1982.

[2] Mónica Clapp. *Análisis Matemático.* Papirhos. (2020).

[3] Emmanuel Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds.* Springer. (1996).

[4] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities.* AMS. (1999).

[5] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer. (2013).

[6] John M. Lee. *Riemannian manifolds: An introduction to curvature.* Graduate Texts in Mathematics 176. Springer. (1997).

[7] María de los Ángeles Sandoval Romero. *Introducción al Análisis Geométrico.* Las prensas de Ciencias. UNAM. (2023).

Para cualquier duda del curso, no duden en contactarme:

Ma. de los Ángeles Sandoval Romero
Cubículo 238 Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias. UNAM.
selegna@ciencias.unam.mx