

CURSO AVANZADO DE POSGRADO EN TOPOLOGÍA  
ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS CON LA TOPOLOGÍA DE  
LA CONVERGENCIA PUNTUAL ( $C_p$ -Theory)

Ángel Tamariz Mascarúa

agosto 2024 – enero 2025

El objeto básico de estudio de este curso es el espacio  $C(X)$  de funciones continuas real-valuadas y definidas sobre un espacio topológico Tychonoff  $X$  considerado,  $C(X)$ , con la topología de subespacio del espacio producto  $\mathbb{R}^X$ ; es decir, considerado con la llamada topología de la convergencia puntual. El conjunto  $C(X)$  con esta topología se denota  $C_p(X)$ .

El espacio  $C_p(X)$  ha sido estudiado muy ampliamente, y el interés que se ha puesto en su análisis se debe a varias razones: en primer lugar la transición de  $X$  a  $C_p(X)$  es de interés; puede ser considerado como una operación natural sobre  $X$ . Si  $X$  es discreto esta operación es la potencia  $X$  de la recta euclideana  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^X$ . Si  $X$  es un espacio típico como un intervalo,  $\mathbb{R}$  mismo, el cubo de Hilber, etc,  $C_p(X)$  puede ser considerado también como espacio típico y es importante compararlo con otros espacios topológicos.

Como veremos durante el curso, las propiedades de  $C_p(X)$  pueden ser muy diferentes a las de  $X$ . Esto nos hace pensar que estudiar los espacios  $C_p(X)$  nos pueden proporcionar ejemplos nuevos de espacios topológicos.

Pero en el centro de todo está la siguiente pregunta fundamental: ¿Cómo están relacionadas las propiedades de  $X$  con aquellas de  $C_p(X)$ ? Una de las diferencias esenciales entre  $X$  y  $C_p(X)$  es que el primero sólo posee su estructura topológica, en cambio la topología de  $C_p(X)$  va acompañada de dos operaciones algebraicas que lo convierten en un anillo topológico; de este modo podemos estudiar a  $C_p(X)$  simplemente como espacio topológico, o como anillo topológico o como grupo topológico o como espacio vectorial topológico.

**Temario:**

- (1) Axiomas de separación y numerabilidad en  $C_p(X)$ .
- (2) Funciones cardinales topológicas aplicadas a  $C_p(X)$ .
- (3) Metrizabilidad y completitud de espacios  $C_p(X)$ .
- (4) Propiedades de compacidad de  $C_p(X)$ .
- (5) Realcompacidad de  $C_p(X)$ .

**Bibliografía que guiará el curso:**

Vladimir V. Tkachuk, *A  $C_p$ -Theory Problem Book, Topological and Function Spaces*, Problem Book in Mathematics, Springer, 2011.

**Bibliografía de apoyo sobre los temas tratados:**

A.V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces, Mathematics and its Applications*, vol. 78, Kluwer Academic Publishers, 1992

**Bibliografía de apoyo en temas generales de topología:**

- (1) F. Casarrubias Segura y Ángel Tamariz, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas, No. 37, Sociedad Matemática Mexicana.
- (2) R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- (3) A. García-Maynez y Ángel Tamariz, *Topología General*, Porrúa, 1988.
- (4) S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

**Forma de trabajo durante el curso:**

- (1) Las clases serán los lunes, miércoles y viernes de 10:30 a 12:00 en el cubículo 116 del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias.
- (2) Se repartirán los materiales a estudiar para que cada uno de los participantes exponga su material durante la clase.
- (3) Se repartirán ejercicios entre los participantes y se organizarán sesiones especiales en las cuales se expongan estos ejercicios.
- (4) Los materiales a exponer y los ejercicios serán elegidos entre la bibliografía básica y la de apoyo.

**Requisitos:**

- (1) Haber llevado los cursos de Topología I y II de la licenciatura o el curso básico de topología a nivel maestría.

Ángel Tamariz Mascarúa  
Profesor Titular C de tiempo completo e  
Investigador Nacional Hemérito del SNI  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias, UNAM