TEMARIO DEL CURSO AVANZADO DE PROBABILIDAD CÁLCULO ESTOCÁSTICO, MODALIDAD DE 9 CRÉDITOS

PROPUESTO POR GERÓNIMO URIBE BRAVO

1. Tema

Cálculo estocástico

2. Prerequisitos

(1) Probabilidad I.
(2) Temas selectos de Procesos Estocásticos I:
   (a) Martingalas en general, particularmente
      (i) Teorema de muestreo opcional.
      (ii) Martingalas e integrabilidad uniforme.
      (iii) Desigualdades de cruces, maximal y L_p de Doob.
      (iv) Teorema de regularización de martingalas.
   (b) Movimiento browniano.
      (i) Existencia.

3. Presentación

El cálculo estocástico ha demostrado ser una herramienta de gran aplicabilidad teórica y práctica. En el campo teórico, ha permitido construir a procesos de Markov (a tiempo y espacio continuo) como soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas. Asimismo, ha mostrado la conexión entre los procesos de Markov y las ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales. En la práctica, el cálculo estocástico es la herramienta principal de las finanzas matemáticas y es útil en la descripción y análisis de modelos en biología matemática.

En este curso se abordará el cálculo estocástico en tres etapas de generalidad: cuando el integrador es un movimiento browniano, cuando el integrador es una semimartingala continua y cuando el integrador es una semimartingala continua posiblemente densamente discontinua. El caso del movimiento browniano que se puede estudiar aparte basándose en el artículo original de Ito en el que se introdujo la integral estocástica. La integral estocástica respecto de semimartingalas continuas es una generalización importante pues es ahí donde se puede apreciar lo útil de teoría sin los innumerables detalles técnicos que implica considerar procesos discontinuos. Finalmente, para el caso general, aprovecharemos desarrollos recientes que permiten accesar la herramienta principal (descomposición de Doob).

4. Temario

(1) Preliminares.
   (a) Proyecciones ortogonales en espacios de Hilbert y la esperanza condicional según von Neumann.
   (b) Recordatorio de propiedades de la esperanza condicional.
   (c) Recordatorio de martingalas.
      (i) Desigualdades de cruces, maximal y L_p de Doob.
      (ii) Teorema de muestreo opcional.
      (iii) Extensión a martingalas cad.
      (iv) Las hipótesis habituales y el teorema de regularización.

Fecha: 4 de Mayo del 2021.

    (d) La integral de Lebesgue-Stieltjes.
(2) Introducción
    (a) Movimiento browniano en ley y su variación cuadrática.
    (b) Prueba de existencia del movimiento browniano via el teorema de regularización de martingalas.
    (c) La integral estocástica respecto al movimiento browniano.
        (i) Fórmula de Ito.
        (ii) Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de Ito.
(3) Martingalas continuas.
(4) Variación cuadrática de martingalas continuas.
(5) Cálculo estocástico con trayectorias continuas.
    (a) La integral estocástica respecto a martingalas continuas.
    (b) Fórmula de Ito.
    (c) Teorema de Knight.
    (d) Teorema de caracterización de Lévy.
    (e) Aplicaciones.
        (i) Movimiento browniano y funciones armónicas.
        (ii) Procesos de Bessel.
        (iii) Polaridad y recurrencia del movimiento browniano. multidimensional.
        (iv) Martingalas conformes y análisis complejo.
        (v) Fórmula de Feynman-Kac.
(6) Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas.
    (a) Teorema de existencia fuerte y unicidad trayectorial bajo condiciones de Lipschitz.
    (b) Técnica de la remoción de deriva.
    (c) Teoremas de existencia y unicidad débil mediante cambios de tiempo.
    (d) Existencia y unicidad débil de procesos de Bessel en dimensión no-negativa.
        (i) Existencia mediante el proceso de Bessel (à la Bass).
        (ii) Técnica de cambios de tiempo generalizados.
(7) Introducción al cálculo estocástico con trayectorias discontinuas
    (a) La descomposición de Doob-Meyer
    (b) Variación cuadrática para martingalas cad
    (c) La integral estocástica
    (d) La fórmula de Ito
    (e) Aplicación a procesos de Lévy
(8) Aplicaciones selectas.
    (a) Tiempos locales y el teorema de Ray-Knight.
    (b) Procesos de ramificación continua con inmigración
    (c) Procesos tipo Ornstein-Uhlenbeck.
    (d) Modelos de Wright-Fisher.
    (e) La integral respecto de medidas de Poisson aleatorias y de procesos de Lévy.

Bibliografía

References

[BSV12] Mathias Beiglböck, Walter Schachermayer, and Bezirgen Veliyev, *A short proof of the Doob-Meyer theorem*, Stochastic Process. Appl. **122** (2012), no. 4, 1204–1209. MR 2914749

[CW14] K. L. Chung and R. J. Williams, *Introduction to stochastic integration*, second ed., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer, New York, 2014. MR 3136102

[Itô44] Kiyosi Itô, *Stochastic integral*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 519–524. MR 0014633

[KS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1121940 (92h:60127)

[RW00] L. C. G. Rogers and David Williams, *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition. MR 1780932 (2001g:60189)

[RY99] Daniel Revuz and Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 293, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1725357