Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2024-II.
29 de julio de 2024.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Demuestra que si G es un grupo cíclico entonces $Aut(G)$, el grupo de automorfismos de G, es abeliano.

2. (a) Demuestra que si $n \geq 3$ el centro del grupo S_n es trivial.
   (b) Demuestra que si $n \geq 5$ el grupo S_n tiene un único subgrupo normal propio.

3. Sean p, q dos números primos. Usa los teoremas de Sylow para demostrar que no existen grupos simples de orden p^2q.

4. Sean p un número primo, H un subgrupo del grupo finito G y P un p-subgrupo de Sylow de G. Demuestra que existe $g \in G$ tal que $H \cap gPg^{-1}$ es un p-subgrupo de Sylow de H.

5. Demuestra que todo p-grupo finito es soluble.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Usa el lema de Zorn para demostrar que cada ideal propio de un anillo asociativo con uno está contenido en algún ideal máximo.

2. Sean D un dominio de ideales principales y E un dominio entero que contiene a D. Demuestra que si d es un máximo común divisor de a, b en D, entonces también lo es en E.

3. Sea $f(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$;
(b) $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es racional;
(c) $\left|Gal\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)/\mathbb{Q}\right)\right| = 2$.

4. Sea E un campo de factorización de $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Encuentre $Gal\,(E/\mathbb{Q})$.
   Sugerencia: Las raices de $f(x)$ son: $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ y $\pm(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

5. Sea K un campo de característica p positiva y sea $a \in K$. Demuestra que el polinomio $f(x) = x^p - a$ es irreducible sobre K o se factoriza totalmente en $K[x]$.