Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2024-II.
29 de julio de 2024.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Cada uno de los seis ejercicios tiene el mismo valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos y con unidad. Además, k es un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

1. Calcula la función y el polinomio de Hilbert para el anillo
$$k[x,y,z,w]/(x,y)\cap(z,w)$$
Compara con la función y el polinomio de Hilbert del anillo $k[x,y]$.

2. Sean R un anillo y M un R-módulo. Demuestra lo siguiente:
1) Si $m\in M$, entonces $m=0$ si y solo si m tiene imagen cero en cada localización $M_{\mathfrak{M}}$ en un ideal maximal $\mathfrak{M}\subset R$;
2) $M=0$ si y solo si $M_{\mathfrak{M}}=0$ para cada ideal maximal $\mathfrak{M}\subset R$.

3. Sean R un anillo y M un R-módulo finitamente generado. Demuestra que si $\varphi : M \longrightarrow M$ es un epimorfismo de R-módulos, entonces φ es un isomorfismo.

4. Sea R un anillo y sean M, N dos R-módulos finitamente generados con $M\otimes_R N=0$. Demuestra lo siguiente:
1) $annM+annN=0$, donde $annM$ denota el anulador de M;
2) Si R es local, además se cumple que $M=0$ o $N=0$.
Puedes usar el Lema de Nakayama en la prueba.

5. Sean R un anillo, $I\subset R$ un ideal y M un R-módulo finitamente generado. El anillo asociado graduado de R respecto a la filtración inducida por I es $gr_I(R)={}^{R}/_{I}\oplus {}^{I}/_{I^2}\oplus ...$
1) ¿Qué significa que una filtración $\mathcal{M}: M=M_0\supset M_1\supset M_2\supset ...$ sea I-estable?
2) Si $\mathcal{M}: M=M_0\supset M_1\supset M_2\supset ...$ es una filtración I-estable con

los M_i R-módulos finitamente generados, entonces el módulo asociado graduado $gr_{\mathcal{M}}(M)$ es finitamente generado como $gr_I(R)$-módulo.

6. Sean $R = k[t]/(t^2)$ y M un R-módulo. Demuestra que M es plano si y solo si la aplicación multiplicación $M \longrightarrow tM$ induce un isomorfismo ${}^{M}/_{tM} \longrightarrow tM$.