Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen general: Análisis numérico
Verano 2024

____

Instrucciones. Tiene 4 horas a partir de la hora de inicio de su lectura para entregar el examen. Habrá un periodo corto de aproximadamente 10 minutos de tiempo para lectura de preguntas antes de comenzar el trabajo para el examen. Entregue una sección de respuestas y adjunte en una sección separada su trabajo en borrador. Se le recomienda que comience a redactar la sección de respuestas al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. Tome en cuenta que tiene menos de cuatro horas para trabajar en su examen. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre completo. Los examenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles (e.g. respuestas con tachones o borrones) no serán calificados.

Problema	Max	Puntos
1	10	
2	5	
3	20	
4	5	
5	20	
6	15	
7	15	
8	10	
Total:	100	

Preguntas

1. (10 puntos) *Análisis de errores de redondeo.* Suponga que $x = 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$ es un número real (con $d_1 \neq 0$ y $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $i > 1$), entonces decimos que $fl(x)$ es una aproximación de x con un redondeo a k cifras. Demostrar que
$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leqslant 0.5 \times 10^{-k+1} \tag{1}$$
Sugerencia: si $d_{k+1} < 5$ entonces $fl(x) = 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k \times 10^n$. Si $d_{k+1} \geq 5$ entonces $fl(x) = 0.d_1 d_2 d_3 \dots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$.

2. (5 puntos) *Ceros de funciones.* Dé un método localmente convergente para determinar el punto fijo $\xi = \sqrt[3]{2}$ de:
$$\Phi(x) = x^3 + x - 2 \tag{2}$$
No usar transformación de Aitken.

3. (20 puntos) *Método de Newton.* Dada una matriz regular $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, su inversa $X = A^{-1}$ es obviamente una solución de la ecuación no lineal:
$$X^{-1} - A = 0 \tag{3}$$
Usando el método de Newton para obtener la solución de la ecuación anterior se llega al método de Schultz's:
$$X_{j+1} = X_j + X_j \left(I - AX_j\right), \quad j = 0, 1, \dots \tag{4}$$
Muestre que para toda matriz inicial $X_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con $||\,(I - AX_0)\,|| \leqslant q < 1$ (con una norma matricial submultiplicativa $||\bullet|| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), la sucesión de matrices $X_0, X_1, \dots \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ converge a la matrix X^{-1} con la desigualdad:
$$||\left(X_j - A^{-1}\right)|| \leqslant \frac{||X_0||}{1-q} ||I - AX_j|| \leqslant \frac{||X_0||}{1-q} ||q^{2j}, \quad j = 0, 1, \dots \tag{5}$$

4. (5 puntos) *Interpolación de Hermite.* Sea $f(x) = e^x$. Encuentre el polinomio de Hermite $p_5(x)$ que aproxima a f usando los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Compare esta aproximación con la obtenida usando polinomios de Lagrange.

5. *Reglas de cuadratura.* La regla básica *corregida* del Trapecio esta dada por:
$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(0) + f(h)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(0) - f'(h)\right] \tag{6}$$
   (a) (10 puntos) Deduzca esta regla.
   (b) (5 puntos) Determine el grado máximo del polinomio que puede integrarse de forma exacta con esta regla.
   (c) (5 puntos) Dé la expresión de la correspondiente regla compuesta para los casos de nodos de integración equidistantes (distribuidos uniformemente) y para el caso general de nodos no uniformes.

Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen general: Análisis numérico
Verano 2024

6. *Factorización QR.* Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, con $m \geq n$
   (a) (5 puntos) ¿Cuál es la factorización QR de la matriz A?
   (b) (10 puntos) Describa el cálculo de la factorización QR con la ayuda de las matrices de Householder.

7. *Descomposición SVD.* Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $n \leqslant m$, A de rango completo.
   (a) (5 puntos) ¿Cuál es la descomposición SVD de la matriz A? Mencione las propiedades de las matrices en la descomposición. ¿Qué tamaños tienen estas matrices?
   (b) (10 puntos) Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Exprese el problema de la minimización de la norma Euclidiana de mínimos cuadrados:

$$\overset{\min}{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left|\left| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \right|\right| \tag{7}$$

   en términos de la descomposición SVD (sigular value decomposition), aqui $|| \bullet ||$ denota la norma Euclidiana.

8. (10 puntos) *Punto fijo.* Sea $g(x)$ una función que tiene valores en los reales, continua y acotada en un intervalo $[a, b]$. Se dice que g es una **contracción** en $[a, b]$ si existe una constante L tal que $0 < L < 1$ y

$$\left|g(x) - g(y)\right| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b]. \tag{8}$$

   Muestre que $g(x)$ tiene un único punto fijo $\hat{x}$ en [a,b] y que la iteración $x_{k+1} = g(x_k)$, k=1,2,3,.. converge a $\hat{x}$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$. Si además $g(x)$ es diferenciable en $[a, b]$ y $x_k \neq \hat{x}$, k=0,1,2,... determine:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left|x_{k+1} - \hat{x}\right|}{\left|x_k - \hat{x}\right|} \tag{9}$$