Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2024-2

1 Instrucciones

Se tendrá 3 horas para entregar su examen a partir de la hora de inicio. Entregar en hojas por separado sus respuestas indicando los pasos para llegar a la respuesta final. Se tiene que escribir en limpio y claro todos los pasos de su razonamiento matemático. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre y enumere las páginas. Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles no serán calificados.

2 Problemas

1. (25 puntos) Deducción del método de Taylor.
   Sea el problema de valor inicial de una ecuación diferencial ordinaria escalar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y' &= f(y,t), \;\; t \in (0,T) \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Enuncie la definición del error de truncamiento (consistencia) local para un método numérico de un paso que aproxima el problema (1).

   (b) **Deducir formalmente** el método explícito de Taylor de orden 3:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= y_0 \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \Delta t \cdot T^{(3)}(\hat{y}_i, t_i) \;\; \text{para } i \in \{0, \ldots, N\}. \end{aligned} \tag{2}$$

   Donde N es el número de sub-intervalos que divide a $[0,T]$, $t_i := i\Delta t$ y $\Delta t := T/N$. Específicamente, encontrar la expresión explícita de $T^{(3)}(\hat{y}_i, t_i)$, y verificar que efectivamente el orden de truncamiento para aproximar el problema (1) utilizando (2) es de orden $r = 3$.

2. (15 puntos) Implementación de un método implícito.
   Sea el problema de valor inicial en el intervalo $0 \leq t \leq 2$:

$$y' = -(y+1)(y+3), \tag{3}$$

   sujeta a $y(0) = -2$. Eliga un método numérico de orden de consistencia de orden $r = 2$ e **implícito** (ej. BDF2, punto medio, TaylorImplícito, etc) para aproximar el problema (3). Describir de forma **clara y completa** el pseudo código de la implementación del algoritmo para resolver (3) utilizando el método seleccionado con un número de subintervalos N que dividen el intervalo global $(0, 2)$, y a su vez utilizando el método de Newton con criterio de paro de $\epsilon > 0$ de la diferencia absoluta entre aproximaciones sucesivas, y un máximo de iteraciones N_{Newton} en cada iteración en el tiempo.

3. (25 puntos) Error de Truncamiento de métodos multipaso.
   La forma general de un método multipaso de m-niveles para resolver el problema de condición inicial (1) es:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{i+1} &= a_{m-1}\hat{y}_i + a_{m-2}\hat{y}_{i-1} + \cdots + a_0\hat{y}_{i+1-m} \\ &\quad + \Delta t(b_m f(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, \hat{y}_i) + b_{m-2}f(t_{i-1}, \hat{y}_{i-1}) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, \hat{y}_{i+1-m})).\end{aligned} \tag{4}$$

   (a) Enuncie la definición de error de truncamiento (consistencia) para métodos multipaso expresado de la forma (4).

   (b) Demostrar formalmente lo siguiente: Sea un método numérico multipaso expresado de la forma (4) de m-niveles y sea r un entero positivo. Entonces si cumple las siguientes condiciones:

      i) $\sum_{s=0}^{m-1} a_s = 1$.

      ii) $m^k - \sum_{s=1}^{m}(m-s)^k a_{m-s} - k\sum_{s=0}^{m}(m-s)^{k-1}b_{m-s} = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, r$,

      donde por convención se define que $0^0 = 1$, entonces el método numérico (4) tiene un error de truncamiento de orden r.

4. (15 puntos) Análisis de convergencia.

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b), \tag{5}$$

$$y(a) = y_0. \tag{6}$$

   Supóngase lo siguiente:

   (a) La función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L.

   (b) $\left|\frac{d^2y}{dt^2}(t)\right| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$.

   Sea $\hat{y}_i$ la aproximación de la solución $y(t_i)$ utilizando el método de explícito de Euer:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \Delta t f(t_i, \hat{y}_i) \qquad \text{para } i \in \{0, .., N\},$$

   donde N es el número de sub-intervalos que divide a $[a, b]$, $t_i := a + i\Delta t$, y $\Delta t := (b-a)/N$. Entonces demuestre que

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq C\Delta t \qquad \text{para } i \in \{0, .., N\}, \tag{7}$$

   donde C es una constante. Supóngase adicionalmente que $\Delta t < 1$. **Sugerencia**: Utilice el siguiente Lemma: Sean t, s números reales positivos y sea $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ una sucesión que satisface

$$a_0 \geq -\frac{t}{s}, \qquad \text{y} \qquad a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t \quad \text{para } i \in \{0, .., k-1\},$$

   entonces,

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}.$$

5. (20 puntos) Estabilidad.

   (a) Sea el problema de valor inicial (1), para $f \equiv \lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar analíticamente que el método del trapecio definido como

$$\begin{aligned}\hat{y}_0 &= y_0 \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \frac{\Delta t}{2}(\lambda \hat{y}_i + \lambda \hat{y}_{i+1}),\end{aligned}$$

   es incondicionalmente estable para todo $\lambda \in \mathbb{R}^-$.