UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Julio 2024
Semestre 2024-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- (6 puntos) Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- (6 puntos) El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Sea f una función holomorfa en Ω y sea
$$\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in \Omega\}.$$
Demuestre que la función $f^\#$ tal que $f^\#(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es holomorfa en Ω^*.

2. (6 puntos) Sea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = 2\}$ orientada en el sentido positivo. Calcule la integral
$$\int_\gamma \frac{z+i}{z^2 + 2iz - 4} dz\,.$$

3. (6 puntos) Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por
$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^3 - z^2}\,.$$
   a) Encuentre los ceros de f y calcule sus ordenes.
   b) Encuentre los polos de f y calcule sus ordenes y residuos.
   c) Sea $\hat{f}$ la extensión de f a la esfera de Riemann. ¿Qué tipo de singularidad tiene $\hat{f}$ en ∞ ? Calcule su orden y su residuo en caso de ser un polo.
   d) Calcule
$$\int_\gamma f(z) dz$$
   en donde
$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto \frac{1}{2}\exp(it)\,.$$

4. (6 puntos) Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\hat{f}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ su extensión a la esfera de Riemann.

a) Muestre que si $f(z) = f(z+n)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces o bien f es constante o bien $\hat{f}$ tiene una singularidad esencial en ∞.

b) Muestre que si $f(z) = f(z+n+im)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces f es constante.

5. (6 puntos) Sea f es una función entera tal que

$$max_{|z|=R}\{|f(z)|\} \leq AR^k + B,$$

para toda $R \geq 0$. Pruebe que f es un polinomio, es decir se cumple que las derivadas de orden n, $f^{(n)}(0) = 0$, si n es suficientemente grande.

6. (6 puntos) Sea $p(z) = z^n + q(z)$ con $q(z)$ un polinomio de grado $n-1$ distinto de cero. Pruebe que existe z con $|z| = 1$ y $|p(z)| \geq 1$.

   Sugerencia: si suponemos que $|p(z)| < 1$ en $\{z : |z| = 1\}$, ¿Cuántas raices tendría q ?