POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Julio 2024
Semestre 2024-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá numerar cada hoja.

Durante el examen $\mathbb{F}$ denota el campo $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$ y, si no se dice lo contrario, los espacios vectoriales son tomados sobre $\mathbb{F}$.

1. (6 puntos) Sea E un espacio vectorial normado y de dimensión infinita.
   (I) Demuestra que existe $\{e_i\}_{i\in I}$, una base algebráica (también llamada una base de Hammel) de E, tal que $\|e_i\| = 1$ para toda $i \in I$.
   (II) Supón además que E es de Banach y prueba que I es no numerable.
   (III) Construye una funcional lineal $f : E \to \mathbb{F}$ que no sea continua.

2. (6 puntos) Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita que satisface alguna de las siguientes hipótesis.
   (a) E es reflexivo.
   (b) E^* es separable.

   Demuestre que existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en E tal que $\|x_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n x_n = 0$ en la topología débil de E (también denotada $\sigma(E, E^*)$).

3. (6 puntos) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y suponga que existe $P \subseteq X$ un conjunto que satisface:
   a) si $x, y \in P$ entonces $x + y \in P$,
   b) si $x \in P$ y $t \geq 0$ entonces $tx \in P$,
   c) si $x \in P$ y $-x \in P$ entonces $x = 0$.

   Demuestre lo siguiente.

(I) La relación definida en X como $x \leq y$ sii $y - x \in P$ es un orden parcial.

(II) Sea $W \subseteq X$ un subespacio que satisface que para todo $x \in X$ existe $w \in W$ tal que $x \leq w$.

Demuestre que si f es una funcional lineal en W tal que $f(w) \geq 0$ para todo $w \in W \cap P$ entonces existe F, funcional lineal en X, tal que $F|_W = f$ y $F(x) \geq 0$ para todo $x \in P$.

Sugerencia: para $x \in X$ define

$$A_x = \{y \in W : x \leq y\},$$
$$B_x = \{z \in W : z \leq x\}.$$

Prueba que para toda $x \in X$, $A_x \neq \emptyset, B_x \neq \emptyset$ y prueba que la función

$$\rho(x) = \text{ínf}\{f(y)|y \in A_T e X\}$$

está bien definida y es sublineal.

4. (6 puntos) Sean E, F espacios de Banach sobre $\mathbb{F}$ y sea $\Phi : X \times Y \to \mathbb{F}$ una función bilineal que satisface:

   a) para todo $x \in E$ existe una consante $C_x > 0$ tal que $|\Phi(x, y)| \leq C_x \|y\|$ para toda $y \in F$.

   b) para todo $y \in F$ existe una consante $D_y > 0$ tal que $|\Phi(x, y)| \leq D_y \|x\|$ para toda $x \in E$.

   Prueba que existe una constante $K > 0$ tal que $|\Phi(x, y)| \leq K\|x\|\|y\|$ para todos $x \in E, y \in F$.

5. (6 puntos) En lo siguiente, E y F son espacios de Banach, $N(A)$ y $R(A)$ denotan el kernel y el rango del operador A, repectivamente.

   (I) Sea $A : E \to F$ un operador lineal acotado. Pruebe que $R(A)$ es cerrado en F si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que para cada $x \in E$ existe un $\xi \in E$ con $A\xi = Ax$ y $\|\xi\| \leq C\|A\xi\|$.

   (II) Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset E \to F$ es un operador cerrado no acotado. Pruebe que $R(A)$ es cerrado si y sólo si existe una constante C tal que

   $$\text{dist}(u, N(A)) \leq C\|Au\|$$

   para todo $u \in \mathcal{D}(A)$.

6. (6 puntos) Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$, $(X_3, \|\cdot\|_3)$ espacios de Banach, $T : X_1 \to X_3$ un operador lineal acotado injectivo y $K : X_1 \to X_2$ un operador lineal compacto. Pruebe que para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε tal que

   $$\|Kx\|_2 \leq \varepsilon\|x\|_1 + C_\varepsilon\|TKx\|_3$$

   para todo $x \in X_1$.