VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Julio 2024
Semestre 2024-2

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Sea (X, Σ) un espacio medible. Recuerde que dadas dos medidas con signo finita, μ y ν en (X, Σ), escribimos $\mu \leq \nu$ si y sólo si $\nu - \mu$ es una medida positiva usual (es decir, $(\nu - \mu)(A) \geq 0$ para toda $A \in \Sigma$).

   i. Sean $\mu, \nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ medidas con signo finitas. Muestre que existe una medida con signo $\chi : \Sigma \to \mathbb{R}$ que satisface: $\chi \leq \mu$ y $\chi \leq \nu$ y además si si ρ es una medida con signo finita que cumple $\rho \leq \mu, \rho \leq \nu$ entonces $\rho \leq \chi$.

   ii. Si μ y ν son medidas positivas, muestre que son mutuamente singulares si y solo si $\chi \equiv 0$.

   Nota: dos medidas μ, ν son mutuamente singulares si existe un conjunto medible A, tale que $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$. Si μ, ν son medidas con signo, decimos que son mutuamente singulares si sus variaciones totales, $|\mu|, |\nu|$, son medidas mutuamente singulares.

2. (6 puntos) Pruebe que si (X, Σ, μ) es un espacio con medida, podemos encontrar un espacio de medida completo $\left(X, \bar{\Sigma}, \bar{\mu}\right)$, tal que:

   i. $\Sigma \subset \bar{\Sigma}$;

   ii. $E \in \Sigma$ implica que $\mu(E) = \bar{\mu}(E)$;

   iii. $E \in \bar{\Sigma}$ si y solo si $E = A \cup B$ donde $B \in \Sigma$ y $A \subset C$, $C \in \Sigma$, $\mu(C) = 0$.

   Nota: decimos que un espacio de medida $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ es completo si las relaciones $A \in \mathcal{S}$, $\nu(A) = 0$ y $B \subseteq A$ implican $B \in \mathcal{S}$.

3. (6 puntos) Sea $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de medidas con signo en un espacio medible (X, Σ) tales que

   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\nu_n|(X) < \infty.$$

   Muestre que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$ es una medida con signo finita en (X, Σ).

4. (6 puntos) Sea m la medida de Lebesgue y $f \in L^1((0,1), m)$. Define

$$g(x) := \int_{(x,1)} \frac{1}{t} f(t)\, dm(t)$$

con $0 < x < 1$. Muestre que $g \in L^1((0,1), m)$ y

$$\int_{(0,1)} f\, dm = \int_{(0,1)} g\, dm.$$

5. (6 puntos) Sea m la medida de Lebesgue y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, impar. Pruebe que

$$\int_{[-1,1]} |f|^2 dm \leq \int_{[-1,1]} |f'|^2 dm.$$

6. (6 puntos) Por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ denotamos a la σ-álgebra de los Borelianos en $\mathbb{R}^n$. Sean $\mu, \nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ medidas.

   a) Suponga que existe $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu(A_n) \to 0$ y $\nu(A_n^c) \to 0$. Pruebe que μ y ν son mutualmente singulares.

   b) Suponga que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones estrictamente positivas, medibles tal que $\int f_n d\mu \to 0$ y $\int \frac{1}{f_n} d\nu \to 0$. Pruebe que μ y ν son mutualmente singulares.