Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2024-2

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (25 puntos)

(a) Resuelva la ecuación diferencial
$$\dot{x} = \left(1 + \frac{\cos(t)}{2 + \sin(t)}\right) x.$$

(b) Utilice la solución de (a) para escribir la solución matricial fundamental, $\Phi(t)$, del sistema periódico,
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\cos(t)}{2+\sin(t)}\right) & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(c) Calcule la forma normal de Floquet de la matriz fundamental encontrada en (b).

2. (25 puntos) Considere el sistema de ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \alpha x \sin\left(\pi(x^2 + y^2)\right), \\ \dot{y} &= x + (x^2 + y^2 - 1), \end{aligned}$$
donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Demuestre que $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ es una órbita periódica del sistema.

(b) Calcule la derivada del mapeo de Poincaré asociado en el punto $(1, 0)$. (*Ayuda*: Calcule los multiplicadores característicos del sistema asociado y utilice el hecho de que el sistema es 2-dimensional).

(c) ¿Para qué valores de α es γ una órbita periódica hiperbólica?

(d) Discuta la estabilidad de γ en función de α a partir de sus resultados en los incisos (c) y (d).

3. (25 puntos) Suponga que $F : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ es una función suave, positiva y periódica de periodo $p > 0$.

(a) Muestre que si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = F(x)$ y
$$T := \int_0^p \frac{1}{F(y)}\, dy,$$
entonces $x(t + T) - x(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (*Ayuda*: considere $G(x) = \int_c^x (1/F(y))\, dy$ ¿Qué puede decir de la función $g(y) = G(y + p) - G(y)$ y del valor de $G(x(b)) - G(x(a))$?)

(b) ¿Podemos llegar a la misma conclusión si F cambia de signo?

4. (25 puntos)

(a) Encuentre la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(y+2)e^y - 2x}.$$

($Ayuda$: recuerde lo que es una "ecuación exacta".)

(b) Explique cuál es la diferencia entre resolver la ecuación anterior y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - (2+y)e^y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y, \end{aligned} \tag{1}$$

(No es necesario resolver el sistema.)

(c) Escriba fórmulas explícitas para la variedad estable e inestable del único punto fijo de (1). ($Ayuda$: Puede usar la solución del inciso (a) o resolver el sistema explícitamente.)