Examen General de Geometría Algebraica 2024-1.

(julio 2024)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Resuelve 4 de 6 ejercicios. Para aprobar el examen es necesario obtener seis puntos en total (cada ejercicio tiene un valor de 2.5 puntos). Para obtener mención honorífica es necesatirio resolver correctamente los 4 ejercicios.

Todas las variedades están definidas sobre un campo K algebraicamente cerrado. Denotaremos al espacio afín de dimensión n como $\mathbb{A}^n$ y al espacio proyectivo de dimensión n como $\mathbb{P}^n$. El conjunto algebraico definido por el conjunto S se denotará $\mathbb{V}(S)$.

1. Considerar el ideal $I = ((x^2 - y)z, xy - z) \subset K[x, y, z]$ y sea $X = V(I) \subset \mathbb{A}^3$
   (a) encuentra las componentes conexas de X,
   (b) demuestra que cada componente conexa es isomorfa a $\mathbb{A}^1$,
   (c) A qué componentes de X pertenece el punto $O = (0, 0, 0)$? ¿Y los $P := (1, 1, 1)$ y $Q := (1, 0, 1)$?.
   (d) ¿Existen vecindades de O y P en X que sean disjuntas? ¿Existen vecindades de P y Q en X que sean disjuntas?
2. Si Y denota a la imagen del morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dado por
   $$t \mapsto (t^3, t^5),$$
   (a) Demuestra que Y es un subconjunto algebraico afín de $\mathbb{A}^2$. ¿Son $\mathbb{A}^1$ y Y isomorfos? ¿Son racionalmente equivalentes?
   (b) Demuestra que $Z := \mathbb{A}^2 \setminus Y$ es isomorfo a un conjunto algebraico de $\mathbb{A}^3$,
   (c) ¿Es Z racionalmente equivalente a $\mathbb{A}^2$?
3. Si Y es el conjuto de ceros del polinomio $x^2 - x^4 - y^4$ en $\mathbb{A}^2$.
   (a) Encuentra los puntos singulares de Y y de su cerradura proyectiva.
   (b) Encuentra la transformada estricta de Y en $P = (0, 0)$ ¿Es singular? ¿En cuántos puntos corta la transformada estricta con el divisor excepcional?
4. Sea $\Sigma_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ la aplicación de Segre $([s : t], [u : v]) \mapsto [su : sv : tu : tv]$.
   (a) Demuestra que es inyectiva y que su imagen es un cerrado de Zariski de $\mathbb{P}^3$.
   (b) Encuetra dos rectas contenidas en la imagen de $\Sigma_{1,1}$ que pasen por el punto $[1 : 1 : 1 : 1]$.
5. Si V denota a la imagen del morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ definido por
   $$t \mapsto (t^2, t^3, t^5)$$
   (a) Determina el ideal radical $\mathbb{I}(V)$.
   (b) Determinan la cerradura proyectiva de $\bar{V} \subset \mathbb{P}^3$.

(c) ¿En cuántos puntos corta el plano al infinito a $\bar{V}$?

(d) ¿Es $\bar{V}$ una intersección completa?

6. Sean X e Y variedades. Dados dos puntos $P \in X$ y $Q \in Y$ demostrar que el anillo local de X en P y el anillo local de Q en Y son isomorfos si y sólo si existen vecindades de P y Q isomorfas.

¡SUERTE!