Examen General de Geometría Diferencial 2024-2.

(FECHA)

Instrucciones: El examen dura **4 horas**. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor. Es necesario resolver correctamente 4 ejercicios para aprobar y tener 5 ejercicios correctos para obtener mención honorífica.

1. Sea M una n-variedad suave con frontera.
   (a) Muestre que Int M es un subconjunto abierto de M y una n-variedad suave sin frontera
   (b) ∂M es un subconjunto cerrado de M y una $(n-1)$-variedad suave sin frontera
   (c) M es una variedad suave si y sólo si $\partial M = \emptyset$
   (d) Muestre que si $n = 0$ entonces $\partial M = \emptyset$ y por lo tanto, M es una 0-variedad sin frontera.

2. Supongamos que $S \subseteq M$ es una subvariedad encajada de una variedad M y que $\gamma : J \to M$ es una curva suave cuya imagen pertenece a S. Pruebe que $\gamma'(t)$ está en el subespacio $T_{\gamma(t)}S$ de $T_{\gamma(t)}M$ para toda $t \in J$. Muestre, mediante un contraejemplo, que el enunciado no se sigue si S no es una subvariedad encajada de M.

3. Sea M el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ sin el eje z. Definamos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ como:
   $$V = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z},$$
   y consideremos que θ y ψ son los flujos de V y W, respectivamente. Pruebe que V y W conmutan pero que existe $p \in M$ y $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $\theta_t \circ \psi_s(p)$ y $\psi_s \circ \theta_t(p)$ están definidos pero no son iguales.

4. Defina la siguiente $2-$forma ω en $\mathbb{R}^3$:
   $$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$
   (a) Calcule ω en coordenadas esféricas (ρ, θ, φ). (Recuerde que las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ están definidas por $(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)$.)
   (b) Calcule $d\omega$ en coordenadas cartesianas y esféricas y verifique que ambas expresiones representan la misma $3-$forma.
   (c) Calcule el pulback $\iota^*_{\mathbb{S}^2}\omega$ a $\mathbb{S}^2$, usando coordenadas (θ, φ) en el conjunto abierto donde estas coordenadas están definidas.
   (d) Muestre que $\iota^*_{\mathbb{S}^2}\omega$ nunca se anula.

5. Considere la 2-esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ parametrizada con coordenadas esféricas. En estas coordenadas:
   (a) Calcule los símbolos de Christoffel.
   (b) Obtenga la ecuación de las geodésicas.
   (c) Muestre que los meridianos son geodésicas.

6. Sea $n \geq 2$. Decimos que una n-variedad (M, g) es de Einstein si existe $\lambda : M \to \mathbb{R}$ suave tal que

$$Ric = \lambda g$$

   (a) Muestre que toda variedad de curvatura seccional constante es de Einstein.

   (b) Denote por $R_g = \mathrm{tr}(Ric)$ a la curvatura escalar. Muestre que, de hecho, $\lambda = R_g/n$.

¡SUERTE!