EXAMEN GENERAL DE MEDIOS CONTINUOS

Los problemas 3 y 4 son obligatorios para resolver, de los problemas 1 y 2 se debe escoger uno de ellos para resolver. El tiempo de resolución del examen es de 3 horas.

1. Sea el sistema de dos partículas de masa m_1 y $m_2 > 0$ en el plano con un potencial de interacción

$$V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{1}{||\mathbf{q} - \mathbf{q_2}||}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{q}_j$ es la posición de la partícula con masa m_j, $j = 1, 2$, y $||\cdot||$ la norma Eulideana en el plano. Suponer además que las dos partículas se mueven sobre círculos concéntricos de radios $0 < R_1 < R_2$ respectivamente, es decir se satisfacen los contornos holonómicos

$$||\mathbf{q_1}(t)|| = R_1, \quad ||\mathbf{q}_2(t)|| = R_2, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

   (a) Escribir el Lagrangiano del sistema restringido según la teoría de contornos ideales, y las ecuaciones Euler-Lagrange correspondientes. Además encontrar los equilibrios del sistema.

   (b) Escribir el Lagrangiano y las ecuaciones de Euler Lagrange del sistema en las variables $\phi = \theta_1 - \theta_2$, $\psi = \theta_1 + \theta_2$, donde θ_j es una variables angular para la partícula con masa m_j, $j = 1, 2$. Identificar dos constantes de movimiento.

   (c) Mostrar como reducir el problema a una ecuación diferencial para la evolución de la variable ϕ. Encontrar el conjunto de equilibrios de la ecuación para ϕ. Mostrar que describe los equilibrios del inciso (a), y otras soluciones del sistema de las dos partículas.

2. Sea la discretizada de la ecuación de Newton

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \tau^2 F(x_n), \tag{3}$$

donde los $x_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$, representan la posición de una particula de masa $m = 1$ en los tiempos $t = n\tau$, $\tau > 0$ una constante, y $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

una función diferenciable dada que representa la fuerza. El problema de evolución (en tiempo positivo) para este sistema es encontrar la trayectoria q_n, $n \geq 1$, dados q_0, q_1 (que representan los datos iniciales). (Notar que la expresión $(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})/\tau^2$ aproxima la segunda derivada por diferencias finitas.)

(a) Definir $q_n = x_n$, $p_n = x_n - x_{n-1}$, $n \in \mathbf{Z}$, y mostrar que (3) se puede escribir como

$$q_{n+1} = q_n + p_n + \tau^2 F(q_n), \quad p_{n+1} = p_n + \tau^2 F(q_n),$$

para cada $n \in \mathbf{Z}$. Mostrar que el lado derecho define una función de $[q_n, p_n]^T \in \mathbf{R}^2$ a $[q_{n+1}, p_{n+1}]^T \in \mathbf{R}^2$ que es simplectica en el plano.

(c) Sea (3) con $F(x) = -\omega^2 x$. Sean soluciones de la forma $x_n = Ae^{i\Omega n\tau}$, $n \in \mathbf{Z}$, A real. Encontrar una relación entre Ω y ω, y su limite para $\tau \to 0$. ¿Cómo se compara la evolución del sistema discretizado con la de $\ddot{x} = -\omega^2 x$?

3. Considere el problema de dos masas que interaccionan por una fuerza central $F(r)$, siendo r la distancia entre las masas (también es conocido como problema de Kepler). Muestre lo siguiente:

a) Muestre que el problema de dos cuerpos con fuerza central se puede reducir al problema de una masa atraída por una fuerza central colocada en el origen junto con el problema del desplazamiento del centro de masa de las partículas que se mueve de manera inercial.

b) Muestre que el momento angular de la partícula que se mueve alrededor de la fuerza central centrada en el origen es una constante de movimiento.

c) Muestre la segunda ley de Kepler que dice: *la particula al desplazarse sobre su órbita Kepleriana barre áreas iguales en tiempos iguales.*

4. Considere $\mathbb{R}^3$ con variables cartesianas $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$.

(i) Demostrar que la siguiente relación satisface las propiedades de un corchete de Poisson en $\mathbb{R}^3$ para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$:

$$\{f, g\}(\mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot (\nabla f(\mathbf{M}) \times \nabla g(\mathbf{M})) \,. \tag{4}$$

Nota: La identidad de Jacobi no se tiene que demostrar.

(ii) Demostrar que la función $K(\mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^{\mathbf{2}}$ satisface que $\{K, f\} = 0$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Las funciones con esta propiedad se llaman *Casimires* del corchete de Poisson.

(iii) Demostrar que las ecuaciones diferenciales que definen el campo Hamiltoniano de la función,

$$H(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}\right), \tag{5}$$

coinciden con las ecuaciones de Euler para el cuerpo rígido.