EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD
SEMESTRE 2024-II, JULIO DE 2024

Duración: 6 horas
Instrucciones:

1. La calificación aprobatoria mínima es de 5 puntos.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Puede suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Decimos que Y domina estocásticamente a X si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real, donde F_X y F_Y son sus funciones de distribución asociadas. Pruebe que Y domina estocásticamente a X si y solo si existe un vector aleatorio $(\hat{X}, \hat{Y})$ donde $\hat{X}$ distribuye igual que X, $\hat{Y}$ distribuye igual que Y y $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Problema 2.
Sean $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución $Uniforme(0,1)$, definidas en el mismo espacio de probabilidad. Investigue la convergencia casi segura, en probabilidad, en L_1 y en distribución de $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

2.1 $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/n]}(U_n)$.
2.2 $X_n = \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{1}{nU_n}\right)$.

Problema 3. Sea $Y \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ y suponga que $\mathbb{E}[Y^2|X] = X^2$ y $\mathbb{E}[Y|X] = X$. Pruebe que $Y = X$ c.s..

Problema 4. Sea (X_n) una sucesión de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponga que para toda $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_n}\big) \to \varphi(\lambda)$, donde φ es una función continua en cero. Pruebe que la sucesión (X_n) es tensa:

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > M) = 0.$$

Sugerencia: transforme la cola de la distribución mediante una función exponencial.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Considere una cadena de Markov $\{X_t : t \geq 0\}$ con espacio de estados $\{1,2,3\}$ y generador infinitesimal

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encuentre todas las distribuciones estacionarias de la cadena de Markov. Dados los instantes de salto $T_1, T_2, \ldots$ de $\{X_t : t \geq 0\}$, defina la cadena de Markov esqueleto (discreta) $Y = \{Y_n : n \geq 0\}$ dada por $Y_n := X_{T_n}$. Encuentre la matriz de transición de Y y todas sus distribuciones estacionarias.

Problema 6. Sean $\{X_n : n \geq 0\}$ y $\{Y_n : n \geq 0\}$ dos martingalas respecto a la misma filtración $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$. Suponga que $X_n, Y_n \in L_2$ para todo natural. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes, verificando que cada término está bien definido y es finito:

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) = \mathbb{E}(X_0 Y_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}))\,.$$

Problema 7. Sea $N = \{N_t : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson de intensidad λ. Definamos $T_0 = 0$ y T_n el tiempo del enésimo salto de N. Considere la función

$$G_i(t) = \mathbb{P}(T_i \leq t)\,.$$

1. Pruebe que $N_t = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{T_k \leq t < T_{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_k \leq t}$.
2. Pruebe que $\lim_{t \to 0} G_i(t) = 0$ para toda $i \geq 1$ y que $\lim_{i \to \infty} G_i(t) = 0$ para toda $t \geq 0$.
3. Pruebe que $\mathbb{E}(N_t) = \sum_i G_i(t)$ y que $\mathbb{E}(N_t^r) = \sum_i i^r (G_i(t) - G_{i+1}(t))$.
4. Pruebe que para z real tal que $|z| < 1$ ocurre que

$$\mathbb{E}\left(z^{N_t}\right) = 1 + (z-1) \sum_{i=0}^{\infty} G_{i+1}(t) z^i.$$

Problema 8. Sea $\{B(t) : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano estándar. Definamos al proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$ por $X(t) = e^{-t} B(e^{2t})$. Dé una prueba o un contraejemplo de las afirmaciones siguientes.

1. $\{X(t) : t \geq 0\}$ es una martingala.
2. $\{X(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Markov.