Examen General
Teoría de las Gráficas
Agosto 2024 (2024-2)

Duración: 4 horas. Para aprobar el examen es necesario resolver 6 ejercicios ***completos*** *y de forma correcta. Escriba los enunciados completos de los resultados que utilice).*

1. Sean p y q las sucesiones finitas de enteros no negativos $p = (p_1, \ldots, p_m)$ y $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Se dice que la pareja (p, q) es realizable por una gráfica bipartita simple si existe una gráfica bipartita simple G con bipartición $(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_n\})$, tal que $d(x_i) = p_i$, para cada $1 \leq i \leq m$, y $d(y_j) = q_j$, para cada $1 \leq j \leq n$.

   (a) Formule el problema de determinar si una pareja (p, q) es realizable por una gráfica bipartita simple como un problema de flujos en redes. (Es decir, para una pareja (p, q), construya una red N, de tal forma que (p, q) es realizable por una gráfica bipartita si y sólo si N tiene un flujo con cierto valor.)

   (b) Suponga que $q_1 \geq \cdots \geq q_n$. Demuestre que si (p, q) es realizable por una gráfica bipartita simple, entonces

   $$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} q_j, \text{ para cada } 1 \leq k \leq n.$$

2. Sea T un árbol generador de una gráfica conexa y plana G, y sea $E^* = \{e^* \in E_{G^*} \colon e \notin E_T\}$. Demuestre que $T^* = G^*[E^*]$ es un árbol generador de G^*.

3. Sean G y H gráficas simples. Demuestre que si H es no trivial, y cumple $\chi'_H = \Delta_H$, entonces $\chi'_{G \square H} = \Delta_{G \square H}$. (Sugerencia: Considere primero el caso en el que $H = K_2$.)

4. Sea G una gráfica. Suponga que V_G admite un orden total en el que, para cada vértice v, los vecinos de v que se encuentran a su derecha en el orden, inducen una gráfica completa. Demuestre que G es perfecta.

5. Un vértice v en una gráfica G es *esencial* si v es saturado por cada apareamiento máximo de G, es decir, si $\alpha'(G - v) = \alpha'(G) - 1$.

   (a) Describa una familia infinita de gráficas conexas que no tengan vértices esenciales.

   (b) Demuestre que toda gráfica bipartita no vacía tiene un vértice esencial.

6. (a) Demuestre que toda gráfica euleriana con un número impar de vértices tiene tres vértices del mismo grado.

(b) Demuestre que para cualquier entero impar n, mayor o igual a 3, existe una única gráfica simple euleriana de orden n con exactamente tres vértices del mismo grado, y a lo más dos vértices de cualquier otro grado.

7. Sea G una gráfica conexa con al menos 3 vértices. Demuestre que G^3 es hamiltoniana. Recuerde que G^3 es la gráfica que se obtiene de G al hacer adyacentes pares de vértices que se encuentran a distancia menor o igual a 3. (Sugerencia: Basta demostrarlo para una subgráfica conexa de G.)

8. Sean $G_1, \ldots, G_m$ gráficas simples. El número de Ramsey generalizado $r(G_1, \ldots, G_m)$ es el menor entero n tal que cada m coloración por aristas $(E_1, \ldots, E_m)$ de K_n contiene, para alguna $i \in \{1, \ldots, m\}$, una subgráfica isomorfa a G_i de color i. Demuestre que si T es cualquier árbol de orden r, entonces $r(T, K_n) = (r-1)(n-1) + 1$.

9. Sean H una gráfica y $p \in (0, 1)$. Demuestre que casi toda $G \in \mathcal{G}(n, p)$ contiene a H como subgráfica inducida.

10. Demuestre que si G tiene al menos dos núcleos distintos, entonces contiene un ciclo par.