Examen General de Topología Algebraica

Este es un examen de 100 puntos. Para aprobar el examen se requiere un mínimo de 75 puntos; y para obtener mención en el examen, un mínimo de 90 puntos. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

¡Éxito!

1. (20 puntos) Sea M una superficie de género $g \geq 1$. Demuestra que existe un punto $p \in M$ tal que $M \setminus \{p\}$ es homotópicamente equivalente a una cuña de círculos. Posteriormente calcula el grupo fundamental de $M \setminus \{p\}$.

2. (20 puntos) Sea $X = \{(p, q) | p \neq -q\} \subset S^n \times S^n$. Definamos la función $f : S^n \to X$ por $f(p) = (p, p)$. Demuestra que f es una equivalencia homotópica.

3. (20 puntos) Demuestra que el toro es un espacio cubriente de dos hojas de la botella de Klein.

4. (20 puntos) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios con puntos bases que admiten una vecindad que se retrae fuertemente al punto base. Para cada $p > 0$, demuestra que $H_p(X_1 \vee X_2 \vee \cdots \vee X_n) \cong H_p(X_1) \oplus H_p(X_2) \oplus \cdots \oplus H_p(X_n)$.

5. (20 puntos) Demuestra que $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos si $m \neq n$.