EXAMEN GENERAL DE TOPOLOGÍA DIFERENCIAL
2024-II

Posgrado en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Instrucciones:

1. Este examen tiene 6 problemas, cada uno de ellos vale 20 puntos.

2. Los problemas marcados con (*) son obligatorios.

3. Para aprobar el examen se requiere de un mínimo de 70 puntos (90 puntos o más es aprobado con mención honorífica).

4. El tiempo para resolver el examen es de 4 horas.

5. Justifique claramente sus respuestas.

(*) Problema 1. Una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se define mediante

$$(x_0, ..., x_n) \sim (y_0, ..., y_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } (y_0, ..., y_n) = (\lambda x_0, ..., \lambda x_n).$$

El espacio cociente $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} - 0)/\sim$ se llama el espacio proyectivo real.

a) Demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es de Hausdorff y segundo contable.

b) Construya un atlas para $\mathbb{R}P^n$ donde los cambios de coordenadas son funciones suaves.

(*) Problema 2. Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ un mapa diferenciable y $N \subset \mathbb{R}^p$ una subvariedad diferenciable. Muestre que para cada $\epsilon > 0$ existe $v \in \mathbb{R}^p$, con $|v| < \epsilon$, tal que el mapa $M \to \mathbb{R}^p$, $x \longmapsto f(x) + v$ es transversal a N. Sugerencia: considere el mapa $M \times N \to \mathbb{R}^p$, dado por $(x, y) \longmapsto y - f(x)$.

(*) Problema 3. Muestre que la inclusión $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ induce un encaje $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ y $\mathbb{R}P^{n+1} - \mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}^{n+1}$. Además demuestre que $\mathbb{R}P^n$ es orientable para n impar y no orientable para n par.

Problema 4. Demuestre que una variedad diferenciable orientada induce una orientación en la frontera. Dé un ejemplo de una variedad diferenciable no orientada con frontera una variedad diferenciable orientable.

Problema 5. Para los grupos general lineal $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$, especial lineal $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ y el ortogonal $O(n)$ demuestre que son variedades diferenciables y diga cuál es su dimensión real (demuéstrelo).

Problema 6. Demuestre que una función $f : S^1 \to S^1$ se extiende al disco $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ si y sólo si $\deg(f) = 0$.