Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Topología General Semestre 2024-2

Instrucciones

- La duración del examen es de 4 horas.
- El examen consta de 6 preguntas, cada una con un puntaje asignado.
- El total de puntos es 14. Para aprobar el examen es necesario obtener al menos 9 puntos. Para recibir mención honorífica es necesario obtener al menos 12 puntos.

Preguntas:

1. (**2 puntos**) Sean X un espacio topológico y Y un conjunto linealmente ordenado. Considera Y con la topología del orden, es decir la topología generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \{U(x) : x \in X\} \cup \{L(X) : x \in X\}$$

donde, dada $x \in X$, $U(x) = \{p \in X : p > x\}$ y $L(x) = \{p \in X : p < x\}$. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Prueba que

   a) $A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ es un subconjunto cerrado de X.
   b) la función $h : X \to Y$ definida como $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ es continua.

2. **(2 puntos)** Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función cociente (identificación) suprayectiva tal que, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un subconjunto conexo de Y. Prueba que si Y es conexo, entonces X es conexo.

3. **(3 puntos)** Sea X un espacio completamente regular, es decir, un espacio T_1 que cumple que para cada $x \in X$ y para cada subconjunto cerrado F de X tales que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ que cumple que $f(x) = 0$ y, para cada $p \in F$, $f(p) = 1$. Prueba que si A es un subconjunto compacto de X y B es un subconjunto cerrado de X tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ que cumple que, para todo $a \in A$, $f(a) = 0$ y, para todo $b \in B$, $f(b) = 1$.

4. **(3 puntos)**

   a) Sean X y Y subconjuntos de un espacio topológico Z y $A \subseteq X \cap Y$. Prueba que si A es abierto (resp., cerrado) en X y en Y, entonces A es abierto (resp., cerrado) en $X \cup Y$.
   b) Sean E un espacio topológico conexo, A un subespacio conexo de E y B un subespacio abierto y cerrado de $E \setminus A$. Prueba que $A \cup B$ es conexo.

5. **(2 puntos)** Dado un espacio topológico localmente compacto, Hausdorff y no compacto (S, τ), denota por $(A(S), \tau')$ la compactación por un punto de S (también conocida como la compactación de Alexandroff), es decir $A(S)$ es de la forma: $A(S) = S \cup \{p\}$, donde $p \notin S$ y

$$\tau' = \tau \cup \{V \subseteq A(S) : A(S) \setminus V \text{ es un subconjunto compacto de } S\}.$$

Supón que K es un espacio compacto y Hausdorff tal que $K = S \cup \{q\}$, donde $q \notin S$. Prueba que K es homeomorfo a $A(S)$.

6. **(2 puntos)** Dado un espacio topológico S decimos que un subconjunto A de S es un conjunto F_σ si es la unión contable de subconjuntos cerrados de S. Sea X un espacio topológico y considera $\mathbb{R}$ con su topología usual. Para cada entero positivo n, sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente es un conjunto $F_{\sigma\delta}$, es decir, una intersección contable de conjuntos F_σ (Sugerencia: recuerda que en $\mathbb{R}$ una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy).