Teoría de Evolución y de Dispersión para la Ecuación de Schrödinger

Dr. Miguel Arturo Ballesteros Montero (2025-2)

Resumen

En este curso se abordará el estudio detallado de la teoría de dispersión y evolución para la ecuación de Schrödinger, que describe la dinámica de sistemas cuánticos en el tiempo. La teoría de evolución temporal se analizará a través de los métodos de Kumano-Go, Fujiwara e Ichinose en el contexto de la integral de trayectoria. Estos métodos permiten la construcción de una sucesión de integrales oscilatorias definidas sobre espacios de dimensión finita en crecimiento, lo que facilita la aproximación de la evolución temporal en sistemas cuánticos.

El método de Ichinose emplea una aproximación mediante operadores pseudo-diferenciales que convergen de manera fuerte, proporcionando una formulación rigurosa de la evolución cuántica. Por otro lado, los métodos de Kumano-Go y Fujiwara et al. se enfocan en aproximar el núcleo de evolución temporal de forma puntual y logran obtener representaciones explícitas de la aproximación semiclasica utilizando el método de fase estacionaria.

En cuanto a la teoría de dispersión, se estudia cómo evoluciona el sistema en tiempos asintóticos, tanto en el pasado como en el futuro. El principal objetivo es determinar si la evolución temporal del operador de Schrödinger tiene límites bien definidos cuando el tiempo tiende a $\pm\infty$, y cómo los estados de un sistema cuántico se comportan de manera asintótica, es decir, si tienden a estados "libres". Además, se examinará cómo los operadores de dispersión y de onda capturan esta evolución asintótica y describen la interacción de partículas a largo plazo. Se discutirán las herramientas matemáticas clave que sustentan estos análisis, a partir de la literatura especializada en la materia [[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]].

El curso cubrirá el temario a través de presentaciones preparadas por los estudiantes, basadas en la bibliografía seleccionada por el profesor. Dependiendo de los intereses del alumnado, el enfoque podrá orientarse más hacia la teoría de dispersión o hacia el estudio de la evolución temporal detallada de los sistemas cuánticos.

Requisitos

Se espera que los estudiantes dominen los siguientes conceptos y técnicas avanzadas:

- Teoría Espectral
- Análisis Micro-Local
- Operadores Pseudo-Diferenciales
- Integrales Oscilatorias
- Teoría de la Medida
- Análisis Funcional Avanzad
- Teoría de Operadores en Espacios de Hilbert
- Ecuaciones Diferenciales Parciales
- Espacios de Funciones
- Teoría de Distribuciones
- Nociones de Física Matemática (Cuántica y Clásica).

Temario

El curso cubrirá los siguientes temas, los cuales podrán ajustarse dependiendo del grupo:

1. Clasificación del Espectro: Análisis del espectro de los operadores de Schrödinger, incluyendo puntos de espectro continuo y discreto.

2. Operadores de Onda: Estudio de los operadores que relacionan el comportamiento asintótico de los sistemas.
3. Operador de Dispersión: Definición y propiedades del operador que describe la evolución asintótica de estados cuánticos.
4. Completitud Asintótica: Verificación de que la evolución temporal de un sistema cubre todos los estados asintóticos posibles.
5. La integral de Kumano-Go e Ichinose en espacio fase. Expansión semiclasica y convergencia.
6. Sistemas relativistas y semi-relativistas: Estudio de sistemas cuánticos bajo los efectos de la relatividad especial.
7. Relación entre la formulación en espacio fase y espacio de configuraciones: Comparación entre las representaciones cuánticas.
8. Método matricial de Ichinose: Uso de matrices en la representación de operadores y su evolución.
9. Problemas abiertos: Discusión de los problemas actuales en la teoría de dispersión y evolución.

Referencias

1 Fujiwara, Daisuke. (2017). Rigorous Time Slicing Approach to Feynman Path Integrals. Springer Tokyo.

2 Kumano-go, Hitoshi (1982). Pseudo-differential operators. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

3 Ichinose, Wataru. (2003). Convergence of the Feynman path integral in the weighted Sobolev spaces and the representation of correlation functions. Journal of The Mathematical Society of Japan - J MATH SOC JPN. 55. 10.2969/jmsj/1191418759.

4 Kumano-go N., Fujiwara D. Phase space Feynman path integrals via piecewise bicharacteristic paths and their semiclassical approximations (2008) Bulletin des Sciences Mathématiques, 132(4), pp. 313 - 357.

5 Ichinose, Wataru. (2006). A Mathematical Theory of the Phase Space Feynman Path Integral of the Functional. Communications in Mathematical Physics - COMMUN MATH PHYS. 265. 739-779.

6 M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. III: Scattering Theory, Academic Press, Inc., (1980).

7 D. R. Yafaev, Mathematical Scattering Theory: General Theory, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 105 (1991).