Temario del curso "Estructuras de conglomerado en Grassmannianas y variedades de bandera" semestre 2025-2

Lara Bossinger

Octubre 2024

1 Resumen

La Grassmanniana $Gr_{k,n}$ es el conjunto de subespacios de dimensión k en un espacio vectorial de dimension n donde $k \leq n$. Generalize los espacios proyectivos $Gr_{1,n} = \mathbb{P}^{n-1}$ y es un ejemplo de un espacio moduli. Además admite la acción del grupo GL_n y por lo tanto es relevante en la teoría de representaciones. Otro aspecto curioso de la Grassmanniana es su *estructura de conglomerado*: tiene un atlas de toros álgebraicos $(\mathbb{C}^*)^d$ donde $d = \dim Gr_{k,n} = k(n-k)$ cuyos pegados (o cambios de coordenadas) son controlados por la regla de mutación en un álgebra de conglomerado. Las álgebras de conglomerado son álgebars conmutativas introducidas por Fomin y Zelevinsky [FZ]. La estructure de conglomerado en la Grassmanniana fue revelado por Scott [S]. En la primer parte del curso estudiamos la estructura de conglomerado de la Grassmanniana y los varios objetos combinatorios asociados.

Una generalización de la Grassmanniana es una variedad de bandera: sean $1 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_k \leq n$ enteros. Una bandera asociada a la tupla $(d_1, \dots, d_k; n)$ es una secuencia de espacios vectoriales $V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \mathbb{C}^n$ que cumple $\dim V_i = d_i$ para cada $1 \leq i \leq k$. El conjunto de todas las banderas asociadas a la tupla $(d_1, \dots, d_k; n)$ se llama *la variedad de bandera (parcial)* $\mathcal{F}_{d_1,\dots,d_k;n}$. En el caso que $d_i = i$ y $k = n-1$ decimos que es la variedad de bandera completa, de lo contrario se llama parcial. La Grassmanniana es un ejemplo: $Gr_{k,n} = \mathcal{F}_{k;n}$. Variedades de bandera son generalizaciones naturales de Grassmannianas y los dos espacios son intimamente relacionados. Por ejemplo, podemos definir un encaje de una variedad de bandera a un producto de Grassmannianas:

$$\mathcal{F}_{d_1,\dots,d_k;n} \hookrightarrow Gr_{d_1,n} \times \cdots \times Gr_{d_k;n}.$$

Las variedades de bandera también tienen estructura de conglomerado determinada por el trabajo de Geiss, Leclerc y Schröer [GLS]. En la segunda parte del curso nos enfocamos en esta estructura y los objetos combiantorios asociados.

En la tercer parte del curso analizamos la interacción de las dos estructuras de conglomerado. Existen además encajes de variedades de bandera parciales en Grassmannianas:

$$\mathcal{F}_{d_1,\dots,d_k;n} \hookrightarrow Gr_{d_k,n+d_k-d_1}.$$

Es una conjetura abierta que dichos encajes llevan a encajes de álgebras de conglomerado: un *subálgebra de conglomerado* es un álgebra conglomerado que se obtiene de otra a través de las operaciones de *congelar* (ya no permitir mutación en ciertas variables) y *espacializar* (evaluar una variable de conglomerado en 1). Revisamos los casos conocidos de la conjetura y la herramienta que se utilizó probando estos casos [BL].

2 Bibliografia

BL Bossinger, Lara; Li, Jianrong. *Cluster structures on spinor helicity and momentum twistor varieties*, arXiv:2408.14956 [math.AG]

FZ Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky. *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc.15(2002), no.2, 497–529.

FWZ Sergei Fomin, Lauren Williams y Andrei Zelevinsky. *Introduction to cluster algebras*, §1-3 en `https://arxiv.org/pdf/1608.05735.pdf`, §4-5 en `https://arxiv.org/pdf/1707.07190.pdf` y §6 en `https://arxiv.org/pdf/2008.09189.pdf`

GLS Geiss, Christof; Leclerc, Bernard; Schröer, Jan. *Partial flag varieties and preprojective algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 3, 825–876.

M Robert J. Marsh. *Lecture notes on clustre algebras*, EMS Zurich Lectures in Advanced Mathematics Volume: 19; 2014; 122 pp; ISBN: 978-3-03719-130-9

S Scott, J. *Grassmannians and cluster algebras.* Proc. London Math. Soc. (3)92(2006), no.2, 345–380.

3 Requisitos

La asistencia al curso requiere los siguientes conocimientos previos.

Cursos básicos: Álgebra moderna, Álgebra conmutativa, Geometría Algebraica
Cursos avanzados: Álgebras de conglomerado