

Seminario: Aspectos cohomológicos de grupos modulares de superficies

Dr. Nestor Colin Hernandez
Semestre 2025-2

Resumen: El objetivo de este seminario es introducir a los estudiantes en temas avanzados relacionados con los aspectos cohomológicos de grupos modulares de superficies, a través de exposiciones realizadas por los mismos participantes. Durante las sesiones, se abordarán resultados fundamentales como la descripción de la cohomología en dimensiones bajas, el estudio de las clases características de Miller-Morita-Mumford, el cálculo de la característica de Euler de los espacios modulares de curvas, así como las dimensiones cohomológica virtual y geométrica de estos grupos.

Horario (tentativo): Miércoles de 16:00 - 18:30 hrs.

Lugar: Aula de seminarios (Instituto de Matemáticas Unidad Oaxaca en la sede alameda de León)

Temario

1. Homología y cohomología en dimensiones bajas de grupos modulares de superficies.

Describir $H_1(\text{Mod}(S); \mathbb{Z})$ y $H_2(\text{Mod}(S); \mathbb{Z})$ empleando la formula de Hopf y la abelianización de $\text{Mod}(S)$. Para este propósito se describirán presentaciones del grupo modular de superficies S siguiendo como referencia el Capítulo 5 de [FM12]. Construir el cociclo de la signatura de Meyer y ver que es un elemento no trivial en $H^2(\text{Mod}(S_g); \mathbb{Z})$ de orden infinito. Esta última parte se puede conectar con la siguiente exposición.

2. Clases características de haces de superficies.

Dar una breve introducción a los haces de superficies, así como ejemplos de los mismos empleando como referencia [ST20]. Ver que la cohomología de grupos modulares de superficies es igual a la cohomología del espacio clasificante del grupo difeomorfismos de S . Construir las clases características de Miller-Morita-Mumford siguiendo el Capítulo 4 de [Mor01] y el artículo [Mor87] dando un panorama sobre los argumentos necesarios para ver que son no triviales.

3. Dimensión virtualmente cíclica de los grupos modulares.

Definir el conmensurador de un subgrupo de un grupo Γ así como introducir los conceptos necesarios para definir la dimensión virtualmente cíclica de un grupo. Exponer brevemente los resultados principales de [NP18] complementando con [JPTN16].

4. La característica de euler del espacio modular de curvas.

Definir la característica de Euler $\chi(\Gamma)$ para un grupo (Capítulo IX de [Bro82]) así como el cálculo explícito en el caso de $SL_2(\mathbb{Z})$, el grupo modular del toro. Dar un breve panorama de las ideas y construcciones que se realizan en [HZ86] para obtener el resultado principal del artículo, el cual establece que $\chi(\text{Mod}(S_g; 1)) = \zeta(1 - 2g)$ donde ζ es la función zeta de Riemann.

5. Sobre la dimensión cohomológica virtual del grupo modular de superficies.

Definir la dimensión cohomológica virtual de un grupo Γ (Capítulo VIII), así como también la noción de dualidad en grupos. Presentar las técnicas y construcciones realizadas en el artículo [Har86], donde se determina la dimensión cohomológica virtual de $\text{Mod}(S)$ para S orientable y con puntos removidos. Complementar los resultados en el contexto no orientable.

Bibliografía

- [Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.
- [Har86] John L. Harer. The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface. *Invent. Math.*, 84(1):157–176, 1986.
- [HZ86] John L. Harer and D. Zagier. The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3):457–485, 1986.
- [JPTN16] Daniel Juan-Pineda and Alejandra Trujillo-Negrete. On classifying spaces for the family of virtually cyclic subgroups in mapping class groups. *Pure Appl. Math. Q.*, 12(2):261–292, 2016.
- [Mor87] Shigeyuki Morita. Characteristic classes of surface bundles. *Invent. Math.*, 90(3):551–577, 1987.
- [Mor01] Shigeyuki Morita. *Geometry of characteristic classes*, volume 199 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1999 Japanese original, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [NP18] Brita Nucinkis and Nansen Petrosyan. Hierarchically cocompact classifying spaces for mapping class groups of surfaces. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(4):569–582, 2018.
- [ST20] Nick Salter and Bena Tshishiku. Surface bundles in topology, algebraic geometry, and group theory. *Notices Amer. Math. Soc.*, 67(2):146–154, 2020.