TEMAS SELECTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

# SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE LEYES DE CONSERVACIÓN

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

(9 CRÉDITOS)

SEMESTRE 2025-2

RAMÓN G. PLAZA

**Contacto.**

Ramón G. Plaza
Oficina 221 (segundo piso), IIMAS (edificio principal).
E-mail: plaza@aries.iimas.unam.mx
Web: https://mym.iimas.unam.mx/ramon/

## Información general

**Horario.**

- Las clases se llevarán a cabo los **martes y jueves de 9:00 a 11:15 hrs.** en un salón del IIMAS por determinar.
- La primera clase tendrá lugar el próximo martes 28 de enero del 2025 a las 9:00 hrs.

**Horas de oficina.**

- En la primera reunión (28 de enero) se definirá una hora fija a la semana (horas de oficina) para atender a los alumnos con dudas y aclaraciones sobre el contenido del curso.

**Página del curso.**

- La página del curso contendrá todos los anuncios relacionados con el mismo, así como el calendario, temario y todo material auxiliar.
- La liga permanente de la página del curso es: http://mym.iimas.unam.mx/ramon/LeyesConservacion-2025-2.html

**Evaluación.**

Se evaluará al alumno con una exposición final de un artículo de investigación y con un proyecto final. Éste último puede ser en equipo de (máximo) tres personas.

**Calendario.**

- Periodo de clases: 27 de enero al 23 de mayo, 2025.
- Periodo de exámenes: 26 de mayo al 6 de junio, 2025.
- Días inhábiles: 3 de febrero, 17 de marzo, 1 y 15 de mayo, 2025.
- Vacaciones de Semana Santa: 14 al 18 de abril, 2025.

**Objetivo.** Introducir al estudiante a la teoría de soluciones a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Se discutirán, entre otros temas: ecuaciones escalares, la fórmula de Lax-Hopf, teoría de Kružkov-Oleĭnik, soluciones débiles a sistemas nolineales de leyes de conservación, condiciones de entropía, el problema de Riemann, ondas de choque, ondas de rarefacción, invariantes de Riemann, discontinuidades de contacto, así como la solución al problema de Cauchy para sistemas.

**Pre-requisitos.** Buenas bases de Análisis Funcional y Análisis Real son deseables. No es requisito el haber llevado el curso básico de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

## Temario

1. Generalidades
   - 1.1 Leyes de conservación y leyes de balance: modelos y ejemplos.
   - 1.2 Soluciones débiles, condiciones de salto de Rankine-Hugoniot.
   - 1.3 Hiperbolicidad y simetrizabilidad.
   - 1.4 Entropía y flujo de entropía.
   - 1.5 Condiciones de admisibilidad.
   - 1.6 Aproximación viscosa.
2. Ley de conservación escalar en una dimensión espacial.
   - 2.1 Soluciones débiles y condiciones de entropía.
   - 2.2 Solución entrópica para flujo convexo: la fórmula de Lax-Hopf.
   - 2.3 Ondas $N$.
   - 2.4 El problema de Riemann.
   - 2.5 Teoría de Kružkov-Oleĭnik.
   - 2.6 Aplicaciones.
3. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión espacial
   - 3.1 Invariantes de Riemann.
   - 3.2 Ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto.
   - 3.3 Ondas de choque.
   - 3.4 Condiciones de entropía de Lax, Oleĭnik y Liu-Oleĭnik.
   - 3.5 Solución al problema de Riemann.
   - 3.6 Teorema de representación de Lax.
4. Existencia de soluciones entrópicas al problema de Cauchy.
   - 4.1 El esquema de Glimm.
     - El espacio $BV$.
     - La estimación de interacción.
     - Aproximación en diferencias.
     - Convergencia.
   - 4.2 Teoría de Bianchini-Bressan.
     - Descomposición viscosa.
     - Interacciones transversales y estimaciones de energía.
     - Estimaciones de estabilidad y convergencia.
5. Leyes de conservación en varias dimensiones espaciales.
   - 5.1 Existencia local de soluciones: el teorema de Kato.
   - 5.2 Formación de ondas de choque y ondas de rarefacción.
   - 5.3 Existencia de frentes de onda de choque.
   - 5.4 Estabilidad de frentes de onda de choque: teoría de Majda-Métivier.
   - 5.5 Discusión: problemas abiertos.

## Bibliografía

Los libros clásicos sobre el tema son: Serre [12, 13], Smoller [14], Dafermos [3] y Bressan [2]. Se complementarán estas referencias con material de otros textos y de artículos de investigación, tales como el artículo seminal de Lax [6]. Un par de libros introductorios muy recomendables son el de Lax [7] y el de Liu [10]. Para ondas de choque no clásicas el libro de LeFloch [8] es una buena referencia. Para la teoría de Kružkov-Oleĭnik recomiendo las notas de Godlewski y Raviart [4]. Excelentes introducciones a métodos numéricos se pueden encontrar en las notas de LeVeque [9] y el libro de Godlweski y Raviart [5]. Para sistemas en varias dimensiones espaciales el estudiante es referido a los libros de Benzoni-Gavage y Serre [1] y Majda [11].

## Referencias

[1] S. Benzoni-Gavage and D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.

[2] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.

[3] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, fourth ed., 2016.

[4] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 3-4 of Mathématiques et Applications, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Éditions Ellipses, Paris, 1991.

[5] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.

[6] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), pp. 537–566.

[7] ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.

[8] P. G. LeFloch, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[9] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.

[10] T.-P. Liu, *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, vol. 72 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2000.

[11] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.

[12] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

[13] ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

[14] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)
*Email address*: plaza@aries.iimas.unam.mx