

Semestre 2025-2

Posgrado en Ciencias Matemáticas. Ecuaciones diferenciales.

Temas selectos. Introducción al modelado matemático de metamateriales en elastodinámica, acústica y electromagnetismo.

Dr. Federico J. Sabina Ciscar, Investigador Titular C, Investigador Emérito del SNI
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM, CU.

Teléfono oficina y/o secretaria: 55 5622 3544, 55 5622 3564

Correo electrónico: fjs@mym.iimas.unam.mx

Google citation: <https://scholar.google.es/citations?user=mNiEc-0AAAAJ>

Página personal: <https://mym.iimas.unam.mx/fjs/> (Actualizada hasta 2019)

1. Descripción general del curso.

1.1. Preámbulo

En la tercera acepción del Diccionario de la Lengua Española, RAE, volumen XIX de 1970 se lee: Meta- preposición del griego con la significación de junto a, después, entre o con; se usa en la formación de palabras compuestas en español como por ejemplo METAcentro. En cambio, la app de la RAE 2020 dice que equivale a acerca de.

No existe una definición general, pero se puede decir que un *metamaterial* es un material con microestructura que no existe en la naturaleza y que se diseña con propiedades interesantes. Por ejemplo, Lente de Veselago. Lente de Pendry. Refracción negativa. (Solyman & Shamonina, 2009).

En electromagnetismo la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas c es tal que $c^2 = \epsilon\mu$ con ϵ y μ positivos (o bien, $\epsilon\mu$ positivo), pero Veselago (1968) estudia el caso en que ambos parámetros son negativos; de todas maneras la velocidad de las ondas electromagnéticas sigue siendo positiva. Consciente de la no existencia de tales materiales con propiedades negativas investiga sus implicaciones. Éstas dieron lugar al llamado lente de Veselago, un lente plano perfecto que se basa en la observación de la existencia de refracción negativa, es decir, aquella refracción que ocurre cuando una onda que incide en una superficie plana se refracta hacia la izquierda, que no era del conocimiento habitual. Cómo se refracta hacia la izquierda se llama refracción negativa. Hoy día una realidad. Más recientemente Pendry (2000) como iniciando una nueva era con el comienzo de un nuevo siglo acuña una nueva palabra para describir al material que alberga el nuevo fenómeno: metamaterial. ¡Una sencilla búsqueda de esa palabra en Google académico arroja más de 500 mil

referencias! Han aparecido nuevos y variados efectos en todos aquellos fenómenos gobernados por ecuaciones diferenciales parciales en espacio y tiempo que aparecen en mecánica, electromagnetismo, acústica, ciencias de la tierra, atmósfera, espacio exterior y un muy largo etc. Además, estos medios cuentan con una o varias microestructuras de tal forma que sus propiedades físicas varían rápidamente con la posición y por lo tanto su estudio se dificulta por medio de métodos numéricos. Involucran principalmente a los llamados medios compuestos que en dinámica requieren un tratamiento matemático un tanto diferente del caso estático.

Objetivo general:

Proveer las bases de las matemáticas que están relacionadas con aplicaciones de las ecuaciones de la elastodinámica, acústica y electromagnetismo que están gobernadas por ecuaciones diferenciales con coeficientes que dependen de la posición y que varían rápidamente en relación a un parámetro pequeño y, también, más allá a una escala intermedia. Establecer conexiones entre las matemáticas y las aplicaciones en otras ciencias.

Objetivos específicos:

- Describir la aplicación del método de homogeneización asintótica a diversos problemas de la mecánica y la acústica para una dimensión, con énfasis tanto en las aplicaciones como en los fundamentos matemáticos.
- Describir la aplicación del método autoconsistente a diversos problemas de la mecánica y la acústica para dos y tres dimensiones, con énfasis tanto en las aplicaciones como en los fundamentos matemáticos.
- Introducir la solución de problemas relacionados con metamateriales, es decir, solución de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia cuando las propiedades físicas de los materiales son periódicas o bien distribuidas al azar y varían rápidamente con la posición. Obtención de curvas de dispersión en forma exacta y aproximada usando métodos variacionales y autoconsistentes. Obtención de propiedades dependientes de la frecuencia. Ejemplos que aparecen en mecánica, acústica y electromagnetismo.
- Uso de una herramienta de Matlab diseñada para dar respuesta a varias interrogantes con potencial de obtención de resultados originales para un curso teórico-práctico en el que se espera que los asistentes seleccionen al menos un problema de los abajo planteados.
- Establecer conexiones de las ecuaciones diferenciales con otras áreas del posgrado como sistemas continuos.

El temario del curso se divide en dos temas principales que se describen a continuación.

Tema 1. Método de homogeneización asintótica. Caso unidimensional elástico y acústico. Aplicación del método de homogeneización asintótica a problemas elípticos en una dimensión, con coeficientes periódicos y de oscilación rápida. Justificación matemática. Generalización y equivalencia en el caso de coeficientes discontinuos entre problemas con condiciones de contacto perfectas e imperfectas. Coeficientes efectivos relacionados

a problemas elásticos y acústicos. Caso bidimensional de cilindros periódicos con simetría cuadrada, hexagonal y paralelogramo. Obtención de fórmulas cerradas de los coeficientes efectivos y, además la velocidad efectiva de propagación. Principio de correspondencia entre problemas acústicos, elásticos de ondas SH y electromagnéticos TE y TM.

Tema 2. Método de autoconsistencia, conocido hoy día como la formulación de Willis para resolver el problema de la dispersión y atenuación de ondas elásticas de baja frecuencia por inclusiones embebidas en una matriz, ambas de propiedades elásticas con distribución al azar de forma isotrópica. Las propiedades físicas dependientes de la frecuencia se obtienen resolviendo una ecuación vectorial de punto fijo. Se plantea la solución de un dispersor, una inclusión embebida en una matriz de comparación de propiedades conocidas. Por medio de una ecuación integral cuya solución es aproximada, da lugar a una ecuación vectorial de orden dos, tres y ocho para cilindros, esferas y elipsoides de revolución con ejes paralelos para las propiedades efectivas complejas como función de la frecuencia. Y en consecuencia se obtienen también las curvas de dispersión y atenuación. La comparación con datos experimentales arroja una muy buena comparación entre la teoría y el experimento. También se tienen resultados similares para un material policristalino donde no hay una matriz como tal. Es el caso de simetría cúbica para el coeficiente de rigidez con solo una ecuación de punto fijo.

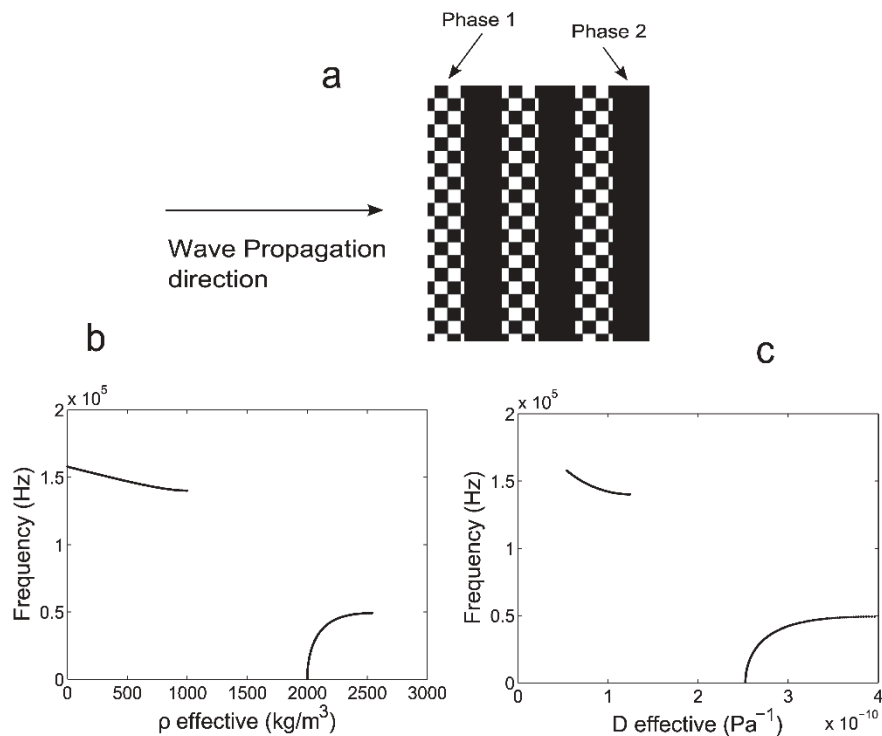


FIG. 1. Effective properties for a 2-phase composite. a. Schematic of 3 unit cells of the composite, b. Effective density, c. Effective compliance.

Figura tomada Nemat-Nasser, S., & Srivastava, A. (2011b). Negative effective dynamic mass-density and stiffness: Micro-architecture and phononic transport in periodic composites. AIP Advances. <https://doi.org/10.1063/1.3675939>

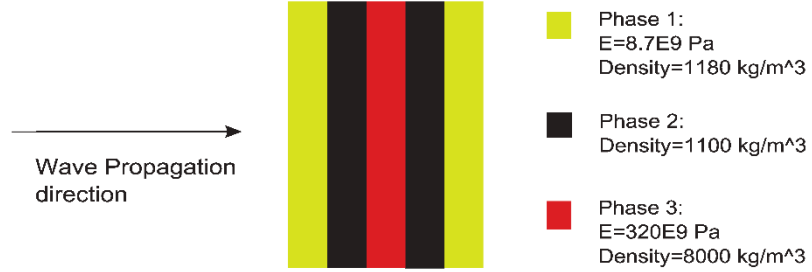


FIG. 2. Schematic of a 3-phase unit cell.

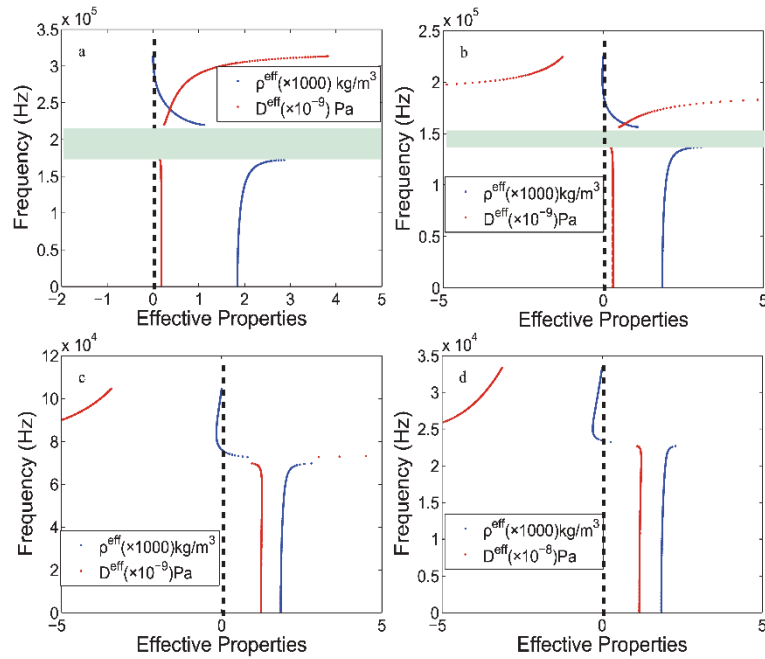


FIG. 3. Effective properties for the 3-phase composite. Shaded area represents stop-band a. $E_{p2} = 2.2$ Gpa, b. $E_{p2} = 1.0$ Gpa, c. $E_{p2} = 0.2$ Gpa, d. $E_{p2} = 0.02$ Gpa.

Figura tomada Nemat-Nasser, S., & Srivastava, A. (2011b). Negative effective dynamic mass-density and stiffness: Micro-architecture and phononic transport in periodic composites. AIP Advances. <https://doi.org/10.1063/1.3675939>

Selección de problemas a desarrollar

Problema 1. Contacto imperfecto

La fabricación de compuestos periódicos puede resultar deficiente en el sentido de que el contacto entre dos materiales diferentes no es perfecto, es decir, la continuidad del desplazamiento y la tracción en un problema de mecánica no es continua. Este caso de contacto imperfecto se puede estudiar de dos maneras. Una usa las llamadas condiciones de imperfección, por ejemplo, la tracción es continua y proporcional al salto del desplazamiento denominada condición de resorte. Este efecto también se puede simular usando una lámina adicional con propiedades apropiadas.

La geometría más sencilla a considerar es la de un laminado periódico con condiciones de contacto perfecto y propagación de ondas.

Véase párrafo a continuación del Problema 2 para el método de solución.

Problema 2. Materiales tipo Cosserat

En 1909 los hermanos Cosserat desarrollaron la teoría elástica más allá de tres grados de libertad agregando al desplazamiento de cada punto del sólido una microrotación alrededor de cada eje de referencia. Hoy día se sabe que hay materiales que se comportan de esta manera como ciertas espumas. Se tienen datos para materiales isótropos y cúbicos. En este caso los tensores de esfuerzo, deformación, torca del esfuerzo y torca de deformación no son simétricos. Sin embargo, la matriz de coeficientes elásticos y de torca si son simétricas (Rodríguez-Ramos et al. 2022).

La geometría más sencilla por considerar es la de un laminado periódico con condiciones de contacto perfecto y propagación de ondas.

Véase párrafo a continuación para el método de solución.

Método de solución de los problemas 1 y 2.

Se busca estudiar los problemas 1 y 2 en el contexto de los metamateriales. Primero hay que hallar la ecuación de dispersión exacta (Rytov, 1956; Lekhner, 1972; Willis, 2016; Srivastava, 2016) por medio del método de la matriz de transferencia. Después se usa el método variacional de Nemat-Nasser (Nemat-Nasser, 1972; Nemat-Nasser & Srivastava, 2011) para hallar las ramas de la ecuación de dispersión en forma aproximada y de ahí derivar, por medio del método de homogeneización, las propiedades físicas como función de la frecuencia. En algunos casos encuentran ramas de densidad de masa y módulo de rigidez negativas! También se da el fenómeno de refracción negativa.

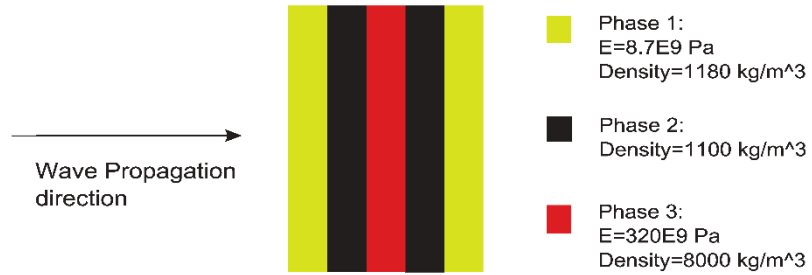


FIG. 2. Schematic of a 3-phase unit cell.

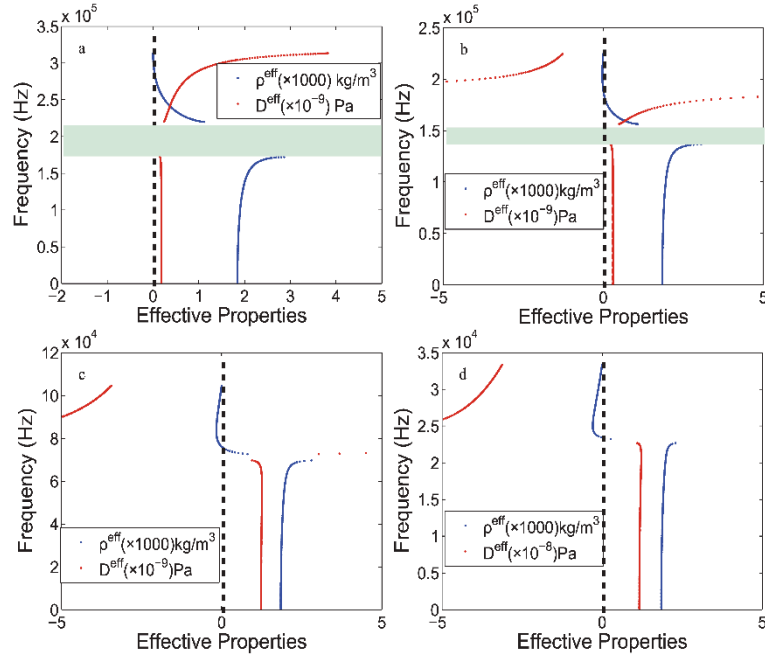


FIG. 3. Effective properties for the 3-phase composite. Shaded area represents stop-band a. $E_{P2} = 2.2$ GPa, b. $E_{P2} = 1.0$ GPa, c. $E_{P2} = 0.2$ GPa, d. $E_{P2} = 0.02$ GPa.

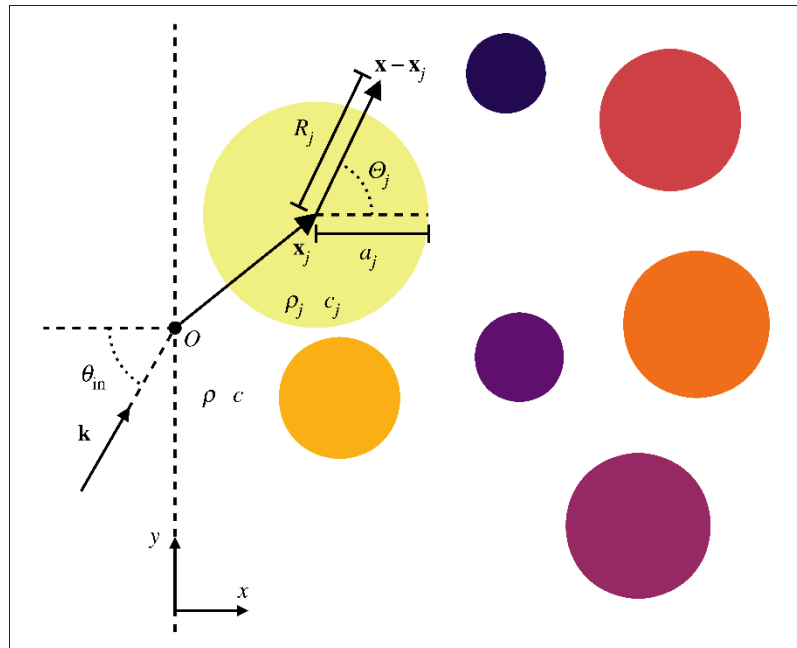
Figura tomada Nemat-Nasser, S., & Srivastava, A. (2011b). Negative effective dynamic mass-density and stiffness: Micro-architecture and phononic transport in periodic composites. AIP Advances. <https://doi.org/10.1063/1.3675939>

Problema 3. Esferas organizadas al azar

Sabina y Willis (1988) estudiaron el problema de la dispersión y atenuación de ondas elásticas de baja frecuencia por inclusiones esféricas embebidas en una matriz ambas de propiedades elásticas. Están distribuidas al azar de forma isótropa. Las propiedades físicas dependientes de la frecuencia se obtuvieron resolviendo una ecuación vectorial de orden tres de punto fijo. Se planteó la solución de un dispersor, una esfera embebida en una matriz de comparación de propiedades conocidas, por medio de una ecuación integral cuya solución aproximada y aplicando el método autoconsistente se obtiene la ecuación de punto fijo. Ésta es vectorial de orden tres.

Para elección juiciosa de materiales y concentraciones hace falta obtener propiedades efectivas, curvas de dispersión y atenuación usando el programa de Ayuso (2024) y las ramas

de la ecuación de dispersión. Se sugiere la aplicación del método variacional de Nemat-Nasser (1972) cuando un par de las propiedades de las esferas y la matriz coinciden con el objeto de simplificar la búsqueda y adquirir más experiencia para luego pasar al caso de coincidencia de dos propiedades y finalmente al de tres.



gura tomada de Gower, A. L., Smith, M. S., Parnell, W. J., & Abrahams, I. D. (2018b). Reflection from a multi-species material and its transmitted effective wavenumber. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 474(2212), 20170864. <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0864>

Problema 4. Elipsoides organizados al azar

Sabina et al. (1993) estudiaron el problema de la dispersión y atenuación de ondas elásticas de baja frecuencia por inclusiones esferoidales de revolución embebidas en una matriz ambas de propiedades elásticas. Están distribuidas al azar de forma isótropa pero de tal manera que los ejes de revolución sean paralelos. Las propiedades físicas dependientes de la frecuencia se obtuvieron resolviendo una ecuación vectorial de orden ocho de punto fijo. Se planteó la solución de un dispersor, un esferoide de revolución embebido en una matriz de comparación de propiedades conocidas, por medio de una ecuación integral cuya solución aproximada y aplicando el método autoconsistente se obtiene la ecuación de punto fijo. Hay que mencionar que en aquel entonces se obtuvo una densidad de masa anisótropa!

Hace falta obtener las ramas de la ecuación de dispersión. Se sugiere la aplicación del método variacional de Nemat-Nasser (1972) cuando todas, salvo una de las propiedades

de los elipsoides y la matriz coinciden. Se sigue el procedimiento descrito en el problema anterior hasta alcanzar el caso de que en todas las propiedades son diferentes. Ver también Ayuso et al. (2024), que trata el caso de esferas o bien esferoides de revolución de razón de aspecto uno.

Problema 5. Cilindros organizados al azar

Bussink et al. (1996) aplican el método autoconsistente de Sabina y Willis (1988) al problema de la dispersión y atenuación de ondas elásticas de baja frecuencia por inclusiones cilíndricas embebidas en una matriz ambas de propiedades elásticas. Están distribuidas al azar de forma isótropa pero de tal manera que los ejes de sean para los cilindros sean paralelos. Las propiedades físicas dependientes de la frecuencia se obtuvieron resolviendo una ecuación vectorial de punto fijo, etc.

Procedimiento didáctico

Se lleva a cabo con la activa participación de los alumnos para que enriquezcan su conocimiento de la temática acerca de los metamateriales.

Inicialmente se hace una selección de artículos relativos al problema elegido por el alumno para ubicarlo rápidamente con la formulación del mismo y las varias técnicas matemáticas que requiere. Se reproducen gráficas publicadas. Una vez asimilado el método se procede al uso del software del problema elegido y la redacción del informe o bien el artículo con resultados originales, aunque esto no se puede garantizar de antemano. Se reportan resultados ante los compañeros para que participen activamente en la discusión del mismo. Así se preparan para su defensa ante el o los posibles árbitros de la revista.

El método de enseñanza consiste inicialmente de clases tradicionales para lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes participantes. Se prevé que desde la primera semana, cada estudiante debe tener definido el problema en el que va a desarrollar su trabajo de investigación.

2. Bibliografía

- Bakhvalov N, Panasenko G. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Kluwer Academic, London, 1989.
- Bertolotti, M. (2010). Waves in Metamaterials, by L. Solymar and E. Shamonina. Contemporary Physics, 51(6), 545–546.
<https://doi.org/10.1080/00107511003790480>

- Julián Bravo-Castillero, Ariel Ramírez-Torres, Federico J Sabina, Catherine García-Reimbert, Raúl Guinovart-Díaz, Reinaldo Rodríguez-Ramos (2020) Analytical formulae for complex permittivity of periodic composites. Estimation of gain and loss enhancement, *Waves in Random and Complex Media* 30 (4) 593-613.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2018.1546063>
- Cioranescu D, Saint Jean Paulin J. *Homogenization of Reticulated Structures*, Springer, 1999.
- Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., & Sabina, F. J. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of fibre-reinforced composite with transversely isotropic constituents. I: Elastic and hexagonal symmetry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(7), 1445–1462.
[https://doi.org/10.1016/s0022-5096\(01\)00005-9](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(01)00005-9)
- Lekner, J. (1994). Light in periodically stratified media. *Journal of the Optical Society of America*, 11(11), 2892.
<https://doi.org/10.1364/josaa.11.002892>
- Banerjee, B. *An Introduction to Metamaterials and Waves in Composites*.
- Nemat-Nasser, S. (1972). General variational methods for waves in elastic composites. *Journal of Elasticity*, 2(2), 73–90. <https://doi.org/10.1007/bf00046056>
- Nemat-Nasser, S., & Srivastava, A. (2011). Negative effective dynamic mass-density and stiffness: Micro-architecture and phononic transport in periodic composites. *AIP Advances*. <https://doi.org/10.1063/1.3675939>
- Rodríguez-Ramos, R., Yanes, V., Espinosa-Almeyda, Y., Otero, J. C., Sabina, F. J., Llamazares, J. S., & Lebon, F. (2022). Micro–macro asymptotic approach applied to heterogeneous elastic micropolar media. Analysis of some examples. *International Journal of Solids and Structures*, 239–240, 111444.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111444>
- Rytov, S. (1956). Acoustical properties of thinly laminated medium. *Soviet Physics-Acoustics* 2, 68.
- Sabina, F. J., & Willis, J. R. (1988). A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites. *Wave Motion*, 10(2), 127–142.
[https://doi.org/10.1016/0165-2125\(88\)90038-8](https://doi.org/10.1016/0165-2125(88)90038-8)
- Sabina, F. J., Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., & Sánchez-Dehesa, J. (2019). Simple closed-form property expressions of a metafluid composed of a hexagonal array of transversely isotropic elastic fibres embedded in

an ideal fluid. Mechanics Research Communications.

<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.05.007>

- Sabina, F. J., Smyshlyaev, V. P., & Willis, J. R. (1993). Self-consistent analysis of waves in a matrix-inclusion composite—I. Aligned spheroidal inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(10), 1573–1588.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90014-7)
- Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E., (1992), Introduction aux méthodes asymptotiques et a l'homogénéisation. Application à la mécanique des milieux continu, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. MASSON
- Solymar, L., & Shamonina, E. (2009). *Waves in Metamaterials*. Oxford University Press. (Véanse referencias a Veselago, 1968 y Pendry, 2000).
<http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA90679654>
- Srivastava, A. (2016). Metamaterial properties of periodic laminates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 96, 252–263.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.018>
- Willis, J. R. (2016). Negative refraction in a laminate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 97, 10–18. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.11.004>