PRESENTACIÓN Y TEMARIO DEL CURSO AVANZADO DE DE PROBABILIDAD
TEORÍA ANALÍTICA DE LOS NÚMEROS: UNA VISIÓN PROBABILÍSTICA

GERÓNIMO URIBE BRAVO

El objetivo de este curso es presentar algunos aspectos probabilísticos de la teoría analítica de los números. Abordaremos tanto la teoría aditiva (particiones, particiones aleatorias y la fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan) como la multiplicativa (teoremas Tauberianos, el teorema de los números primos). En particular veremos modelos de números naturales y sus correspondientes factores primos y presentaremos las heurísticas y conjeturas en teoría de números que provienen de argumentos probabilísticos. Además, analizaremos la analogía entre teoremas clásicos en probabilidad, como las leyes de grandes números y el teorema límite central, y resultados de la teoría de números como el teorema de los números primos y el teorema de Erdös-Kac. También estudiaremos una distribución de reciente interés, la distribución de Poisson-Dirichlet, y su aparición en el teoremas límites para los factores primos más grandes de un entero aleatorio. Presentaremos a la función ξ de Riemann en el análisis del movimiento Browniano. Si el tiempo es suficiente, finalizaremos con el paralelismo entre resultados de matrices aleatorias y conjeturas en teoría de números.

Este curso pretende complementar, con ejemplos tomados de la probabilidad e inspirados en la teoría analítica de los números, a los cursos básicos del área de probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM. Los alumnos deben conocer los temas tratados en Probabilidad I. El curso se puede llevar paralelamente a Procesos Estocásticos I, al cual complementa de manera sorprendente. El curso será autocontenido respecto de la teoría de los números.

1. Temario

(1) La función ζ de Riemann y la distribución de Golomb en los enteros positivos. [Gol70], [Gol92] y [Kow21].
(2) Valores especiales de la función ζ mediante consideraciones probabilísticas [BFY07] y [Pac11].
(3) La distribución ζ y su divisibilidad infinita. Interpretación probabilística de la identidad de Selberg. [Gut06] y [CP22].
(4) Visibilidad de enteros: de la distribución ζ a la distribución uniforme. [BEnH21, HO18, GHKM18] y [CP22].
(5) Los teoremas de Hardy-Ramanujan y Erdös-Kac y el teorema límite central de Lindeberg. [Bil72, Bil95, Bil69, Bil74], [GS07] y [Ten15].
(6) Permutaciones aleatorias y el proceso del restaurante chino (medidas aleatorias de Poisson, ley de Poisson-Dirichlet). [DG93], [Pit06] y [GG19].
(7) Particiones, el teorema límite central local y la fórmula asintótica de Hardy-Ramanujan. [BD97]

(8) La distribución de Poisson-Dirichlet y el teorema de Billingsley sobre factores primos de un natural aleatorio. [Bil72] y [DG93]
(9) El teorema Tauberiano de Ikehara-Wiener y el teorema de los números primos. [Lev73] y [Müg17].
(10) Particiones y las identidades de Gauss y Jacobi. Introducción a la distribución de Chung. [Apo76], [Chu82] y [Pak04].
(11) Versiones probabilísticas de la fórmula de suma de Poisson. Distribuciones de probabilidad relacionadas con la función ξ de Riemann.
(12) Movimiento browniano, excursión browniana normalizada y representación probabilística de la función ξ de Riemann. La identidad $\xi(1-s) = \xi(s)$. [BPY01], [Dev09],
(13) Matrices aleatorias y la función ζ. [Kow21], [BY09], [CNN17].

Referencias

[Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976, Undergraduate Texts in Mathematics. MR 0434929

[BD97] Luis Báez-Duarte, *Hardy-Ramanujan's asymptotic formula for partitions and the central limit theorem*, Adv. Math. **125** (1997), no. 1, 114–120. MR 1427803

[BEnH21] Carolina Benedetti, Santiago Estupiñan, and Pamela E. Harris, *Generalized lattice-point visibility in $\mathbb{N}^k$*, Involve **14** (2021), no. 1, 103–118. MR 4229220

[BFY07] Paul Bourgade, Takahiko Fujita, and Marc Yor, *Euler's formulae for $\zeta(2n)$ and products of Cauchy variables*, Electron. Comm. Probab. **12** (2007), 73–80. MR 2300217

[Bil69] Patrick Billingsley, *On the central limit theorem for the prime divisor functions*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 132–139. MR 242222

[Bil72] ———, *On the distribution of large prime divisors*, Period. Math. Hungar. **2** (1972), 283–289, Collection of articles dedicated to the memory of Alfréd Rényi, I. MR 0335462

[Bil74] ———, *The probability theory of additive arithmetic functions*, Ann. Probability **2** (1974), 749–791. MR 466055

[Bil95] ———, *Probability and measure*, third ed., Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995, A Wiley-Interscience Publication. MR 1324786 (95k:60001)

[BPY01] Philippe Biane, Jim Pitman, and Marc Yor, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38** (2001), no. 4, 435–465 (electronic). MR 1848256

[BY09] P. Bourgade and M. Yor, *Random matrices and the Riemann zeta function*, Journées Élie Cartan 2006, 2007 et 2008, Inst. Élie Cartan, vol. 19, Univ. Nancy, Nancy, 2009, pp. 25–40. MR 2792032

[Chu82] Kai Lai Chung, *A cluster of great formulas*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **39** (1982), no. 1-3, 65–67. MR 653674

[CNN17] Reda Chhaibi, Joseph Najnudel, and Ashkan Nikeghbali, *The circular unitary ensemble and the Riemann zeta function: the microscopic landscape and a new approach to ratios*, Invent. Math. **207** (2017), no. 1, 23–113. MR 3592756

[CP22] Michael Cranston and Adrien Peltzer, *On properties of the Riemann zeta distribution*, Rocky Mountain J. Math. **52** (2022), no. 3, 843–875. MR 4441101

[Dev09] Luc Devroye, *On exact simulation algorithms for some distributions related to Jacobi theta functions*, Statist. Probab. Lett. **79** (2009), no. 21, 2251–2259. MR 2591982

[DG93] Peter Donnelly and Geoffrey Grimmett, *On the asymptotic distribution of large prime factors*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), no. 3, 395–404. MR 1214904

[GG19] Andrew Granville and Jennifer Granville, *Prime suspects*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2019. MR 3966460

[GHKM18] Edray H. Goins, Pamela E. Harris, Bethany Kubik, and Aba Mbirika, *Lattice point visibility on generalized lines of sight*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), no. 7, 593–601. MR 3836421

[Gol70] Solomon W. Golomb, *A class of probability distributions on the integers*, J. Number Theory **2** (1970), 189–192. MR 257017

[Gol92] ———, *Probability, information theory, and prime number theory*, Discrete Math. **106/107** (1992), 219–229, A collection of contributions in honour of Jack van Lint. MR 1181916

[GS07] Andrew Granville and K. Soundararajan, *Sieving and the Erdös-Kac theorem*, Equidistribution in number theory, an introduction, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 237, Springer, Dordrecht, 2007, pp. 15–27. MR 2290492

[Gut06] Allan Gut, *Some remarks on the Riemann zeta distribution*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **51** (2006), no. 2, 205–217. MR 2275304

[HO18] Pamela E. Harris and Mohamed Omar, *Lattice point visibility on power functions*, Integers **18** (2018), Paper No. A90, 7. MR 3874981

[Kow21] Emmanuel Kowalski, *An introduction to probabilistic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 192, Cambridge University Press, Cambridge, 2021. MR 4274079

[Lev73] Norman Levinson, *On the elementary character of Wiener's general Tauberian theorem*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973), 381–396, Collection of articles dedicated to Salomon Bochner. MR 326227

[Müg17] Michael Müger, *An (almost) real proof of the prime number theorem*, https://www.math.ru.nl/~mueger/PDF/PNT_via_Ikehara.pdf, April 2017.

[Pac11] Luigi Pace, *Probabilistically proving that* $\zeta(2) = \pi^2/6$, Amer. Math. Monthly **118** (2011), no. 7, 641–643. MR 2826455

[Pak04] Igor Pak, *The nature of partition bijections. I. Involutions*, Adv. in Appl. Math. **33** (2004), no. 2, 263–289. MR 2074399

[Pit06] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR 2245368

[Ten15] Gérald Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, third ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 163, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion. MR 3363366