Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión de Álgebra Lineal, Semestre 2023-II

Instrucciones.
Escriba una hoja de respuestas y entréguela junto con el resto de su trabajo.
Escriba su nombre en la parte superior de cada una de las hojas que entregue.
Si la hoja de respuestas no es clara y no contiene el trabajo hecho para obtener las respuestas, el examen no se calificará.
Tiene dos horas para trabajar en su examen.
Comience a escribir sus respuestas al menos 20 minutos antes de la hora límite.
Sólo la respuestas contenidas en la hoja de respuestas serán consideradas para su calificación.

Preguntas.

1. (20 pts.) Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V sobre un campo F. Para todo $v \in V$ considera la clase lateral de W que contiene a v:

$$v + W := \{v + w \,:\, w \in W\}$$

   a) Establece la condición sobre $v \in V$ para que la clase lateral $v + W$ sea un subespacio vectorial de V y demuestra la validez de la condición que estableciste.

   b) La suma y el producto por elementos de F puede definirse en el conjunto

$$S := \{v + W \,:\, v \in V\}$$

   de todas las clases laterales de W como sigue:

$$(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W$$

   para toda $v_1, v_2 \in V$, y

$$a \cdot_S (v + W) = av + W$$

   para toda $v \in V$ y $a \in F$.
   Demuestra que las operaciones anteriores están bien definidas. Es decir, muestra que si $v_1 + W = v_1' + W$ y $v_2 + W = v_2' + W$ entonces

$$(v_1 + W) +_S (v_2 + W) = (v_1' + W) +_S (v_2' + W)$$

   y

$$a \cdot_S (v_1 + W) = a \cdot_S (v_1' + W)$$

   c) Demuestra que el conjunto S es un espacio vectorial sobre F con las operaciones definidas en el inciso anterior.

2. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Definimos $rango(T)$ como la dimensión de la imagen de T, denotada por $Im(T)$. Además denotamos por $N(T)$ al núcleo o kernel de T.

   a) Si $rango(T) = rango(T^2)$. Demuestre que $Im(T) \cap N(T) = \{0\}$.

   b) Si $rango(T) = rango(T^2)$. Demuestre que $V = Im(T) \oplus N(T)$.

3. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y sea $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base ordenada para V. Sea Q una matríz invertible de $n \times n$ con elementos en F. Defínase:

$$x'_j = \Sigma_{i=1}^{n} Q_{ij} x_i, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

   a) Demuestra que $\beta' = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$ es una base para V.

   b) Demuestra que Q es la matríz de cambio de coordenadas que transforma la coordenadas de β' en coordenadas de β.

4. (20 pts.) Sean A una matríz $A \in M_{n\times n}(F)$ con F un campo y λ un eigenvalor de A. Denotamos por E_λ al eigenspacio correspondiente al eigenvalor λ.

   Sea $A \in M_{n\times n}(F)$ tal que tenga dos eigenvalores distintos λ_1 y λ_2. Si dim $(E_{\lambda_1}) = n - 1$. Demuestre que A es diagonalizable.

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito con producto interior. Para $x, y \in V$ denotamos por $\langle x, y\rangle$ al producto interior de x y y.
   Sea S un subconjunto de V. Definimos $S^\perp = \{x \in V \,:\, \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in S\}$.

   Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. Demuestra que

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$