Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión de Álgebra Lineal, Semestre 2024-I

Instrucciones.
Escriba una hoja de respuestas y entréguela junto con el resto de su trabajo.
Escriba su nombre en la parte superior de cada una de las hojas que entregue.
Si la hoja de respuestas no es clara y no contiene el trabajo hecho para obtener las respuestas, el examen no se calificará.
Tiene dos horas para trabajar en su examen.
Comience a escribir sus respuestas al menos 20 minutos antes de la hora límite.
Sólo la respuestas contenidas en la hoja de respuestas serán consideradas para su calificación.

Preguntas.

1. (20 pts.) Sea W un subespacio vectorial de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Demuestre que $\dim(W) \leq n$.

2. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales, $T : V \to W$ transformación lineal inyectiva y
$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$
un subconjunto linealmente independiente de V.
Demuestre que el conjunto $B = \{T(x_1), T(x_2), \ldots, T(x_k)\} \subseteq V$ es un subconjunto linealmente independiente de W.

3. (20 pts.) Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita que tienen bases ordenadas β y γ respectivamente y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que para todo $x \in V$ se tiene que $[T(x)]_\gamma = [T]_\beta^\gamma [x]_\beta$, donde $[T(x)]_\gamma$ denota al vector coordenado de $T(x)$ con respecto a la base γ, $[x]_\beta$ denota al vector coordenado de x con respecto a la base β y $[T]_\beta^\gamma$ denota a la matriz que representa a la transformación lineal T con respecto a las bases β y γ.

4. (20 pts.) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base ordenada estándar (ó canónica) de $\mathbb{R}^2$ y $\beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base ordenada de $\mathbb{R}^2$.
Calcule la matriz de cambio de coordenadas que transforma las coordenadas de β en coordenadas de β'.

5. (20 pts.) Considere el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por:
$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b - 2c \\ -4a - 3b + 2c \\ -c \end{pmatrix}$$
Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que conste de eigenvectores de T.