Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Examen de Admisión Álgebra Lineal,
Primavera, 2022

Entregue esta hoja, seguida de una sección de respuestas, y después su trabajo en borrador. Las respuestas deben estar ***limpias, sin borrones o correcciones, con clara distinción entre las respuestas a cada pregunta***. Se le recomienda que comience a redactar sus respuestas en limpio al menos 15 minutos ***antes*** de la hora límite. En la esquina superior derecha de cada página, escriba sus dos apellidos (e.g. HerreraValdez) el número de página, y el total de páginas. Favor de no escribir en la tabla de la derecha. Si su examen es via remota, entregue su trabajo en ***un solo archivo pdf*** cuyo nombre comience como en sus hojas de examen (e.g. HerreraValdez_algebra.pdf). *No serán calificados* los examenes que no cumplan con las instrucciones o no sean entregados a tiempo.

Problema	Max	Puntos
1	20	
2	30	
3	30	
4	20	
5	20	
Total:	120	

1. *Sumas y sumas directas.* Considere los tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$,

$$S_1 = \left\{(x,x,0) \in \mathbb{F}^3 : x \in \mathbb{F}\right\}, \quad S_2 = \left\{(y,0,z) \in \mathbb{F}^3 : y,z \in \mathbb{F}\right\}, \text{ y } S_3 = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{F}^3 : z \in \mathbb{F}\right\}.$$

   (a) (20 puntos) ¿Es cierto que $\mathbb{F}^3 = S_1 + S_2 + S_3 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$? Argumente formalmente su respuesta.

2. (a) (10 puntos) Sean $p_0, ..., p_m \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ y $a \in \mathbb{F}$ tales que $p_j(a) = 0$ para $j = 1, ..., m$. ¿Es $\{p_0, ..., p_m\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$?

   (b) (10 puntos) ¿Existe un conjunto de m polinomios que genera $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$?

   (c) (10 puntos) Encuentre una base para $\left\{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) : \int_{-1}^{1} p = 0\right\}$.

3. *Operadores lineales*

   (a) (10 puntos) Suponga que $\{w_1, ..., w_m\}$ es una base para el rango de $\varphi \in \mathcal{L}(V,W)$. Demuestre que existen $\rho_1, ..., \rho_m \in \mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ tales que $\varphi(v) = \rho_1(v)w_1 + ... + \rho_m(v)w_m$ para toda $v \in V$.

   (b) (10 puntos) Suponga que $\psi \in \mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ y que $\psi(u) \neq 0$. Demuestre que $V = \mathfrak{Nul}(\psi) \oplus \{au : a \in \mathbb{F}\}$.

   (c) (10 puntos) Suponga que $\rho, \varphi \in \mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ tienen el mismo kernel. Pruebe que existe una constante $c \in \mathbb{F}$ tal que $\rho = c\varphi$.

4. *Valores y vectores propios*

   (a) (10 puntos) Sean V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ y $\psi \in \mathcal{L}(V,V)$ ¿Cuántos valores propios distintos puede tener ψ? Argumente formalmente su respuesta.

   (b) (10 puntos) ¿Cómo son las trazas y los determinantes de la familia de matrices en $\mathbb{R}^{2,2}$ que tienen dos valores propios distintos? *Pista: Considere los casos en que los valores propios son reales, y cuando son conjugados*.

5. *Operadores positivos, productos internos, normas.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

   (a) (10 puntos) Demuestre que la proyección ortogonal P_U es positiva para cualquier subespacio $U \subset V$ de dimensión finita.

   (b) (10 puntos) Si $T \in \mathcal{L}(V,V)$ es auto-adjunto y $b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $b^2 < 4c$, entonces $T^2 + bT + cI$ es un operador positivo. *Pista: Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwartz*.

Notación: $\mathbb{F}$ es un campo, $\mathbb{F}^n = \mathbb{F} \times ... \times \mathbb{F}$ (n veces), U, V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$, $\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$ es el conjunto de operadores lineales sobre $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}^{2,2}$ es el conjunto de matrices de 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ representa los *polinomios* de grado m con coeficientes en $\mathbb{F}$. Una funcional lineal de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$ es un operador lineal de V en $\mathbb{F}$, es decir, un elemento de $\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$. Si U es subespacio de V (dimensión finita), para toda $v \in V$ existen $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$ tales que $v = u + w$. La proyección ortogonal $P_U \in \mathcal{L}(V,V)$ mapea $v \mapsto u$. Un operador es $T \in \mathcal{L}(V,V)$ es positivo si para toda $v, w \in V$, $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ y $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ (T es auto-adjunto).