Examen General de Conocimientos:
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2025-I.
20 de enero de 2025.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. En cada uno de los seis ejercicios se indica su valor. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Todos los anillos considerados son conmutativos y con unidad.

- (2 pts.) Sea k un campo y sean $I_1 = \langle X, Y \rangle$ y $I_2 = \langle X, Z \rangle$ ideales del anillo de polinomios $k[X, Y, Z]$. Consideren $J = I_1 \cdot I_2$ el ideal producto.
Demuestra que $J = I_1 \cap I_2 \cap M^2$ donde $M = \langle X, Y, Z \rangle$.
Demuestra que esta intersección es una descomposición primaria reducida de J .
¿Cuáles son los primos minimales asociados a J y cuáles son los encajados?
- (1 pts.) Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo de anillos que hace de B un anillo entero sobre A . Demuestra que el mapeo $f^* : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ es cerrado por la topología de Zariski.
- (1 pts.) Sea $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos. Demuestra que si M y P son Noetherianos entonces N es Noetheriano.
- (2 pts.) Sea A un anillo artiniiano. Demuestra que $\text{Spec}(A)$ es finito.
- (2 pts.) Sea A un anillo Noetheriano y sean $M_1, \dots, M_n$ A -módulos finitamente generados.
Demuestra que $\text{Ass}_A(\oplus_i M_i) = \cup_i \text{Ass}_A(M_i)$.
Demuestra que $\text{Ass}_A(\oplus_i M_i)$ es finito.
- (2 pts.) Sea M un A -módulo finitamente generado y sea $P \in \text{Spec}(A)$. Demuestra que $P \in \text{Supp}_A(M)$ si y solo si $\text{Ann}_A(M) \subset P$; donde Supp se refiere al soporte y Ann al anulador o aniquilador.