Examen General de Conocimientos: Álgebra Moderna.
Semestre 2025-I.
20 de enero de 2025.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. Escoge y resuelve solamente 3 ejercicios de Grupos y 3 ejercicios de Anillos, Campos y Teoría de Galois. La calificación se determinará con base en los 6 ejercicios escogidos. Si se resuelven más de 3 ejercicios en cada sección, se calificarán los primeros 3. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

Teoría de Grupos.

1. Sea G un grupo y considere el producto directo $G \times G$. Demuestra que son equivalentes para una función $f : G \times G \longrightarrow G$ tal que $f((x, y)) = xy$:
   (a) f es un morfismo de grupos;
   (b) G es abeliano.

2. Demuestre que cualquier grupo G es cociente de un grupo libre.

3. Demuestra que cada elemento del grupo simétrico S_n se descompone como un producto de ciclos ajenos.

4. Sean G un p-grupo finito y X un G-conjunto finito. Demuestra que
$$|X| \equiv |X_G| \pmod{p},$$
donde $X_G = \{x \in X \mid \forall g \in G\,(gx = x)\}$.

5. Demuestra que cada grupo de orden 200 tiene un subgrupo normal no trivial que es abeliano.

Anillos, Campos y Teoría de Galois.

1. Sea A un anillo conmutativo con uno. Demuestra que ${}^{A}\!/\!_{\mathcal{M}}$es un campo si y solo si $\mathcal{M}$ es un ideal máximo de A y demuestra que ${}^{A}\!/\!_{\mathcal{P}}$ es un dominio entero si y solo si $\mathcal{P}$ es un ideal primo de de A.

2. Demuestra que si una extensión de campos $K\;|_F$ es finita entonces es algebraica.

3. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Si K es un campo de factorización de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$, demuestra que $Gal\left(K\mid_{\mathbb{Q}}\right)$ es isomorfo al grupo V de Klein.

4. Demuestra que un campo de 9 elementos no puede ser isomorfo a un subcampo de un campo de 243 elementos.

5. Sea $K\mid_F$ una extensión de campos y considere $a \in K$ y $f(x) \in F[x]$ un polinomio irreducible tal que $f(a) = 0$. Demuestra que si $f(x)$ es de grado impar entonces $F(a) = F(a^2)$