Examen de Conocimientos Generales

Análisis Numérico

Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM

Semestre: 2025-1 **Fecha:** Enero 2025

Instrucciones:

- **Calificación:** sobre 25 puntos; se requiere un mínimo de 18 para aprobar.
- **Duración:** 3 horas. Administra tu tiempo adecuadamente.
- Enumera los ejercicios e incisos, indicando dónde termina cada uno, y escribe tu nombre en todas las hojas.
- Responde de manera clara y concisa, mostrando todos los pasos y justificando tus respuestas. Los exámenes que no sean legibles no serán calificados.
- **Nota:** Se evaluará el razonamiento y la claridad de tus ideas.

Ejercicios

1 **Sistema de punto flotante.** Considera el sistema de punto flotante $fl(\beta, \tau, L, U)$.

a) (2 puntos) Determina cuántos números enteros menores a 100 se pueden representar en el sistema de punto flotante con precisión simple $fl(2, 24, -125, 128)$.

b) (1 punto) Menciona qué entiendes por *overflow* y proporciona un ejemplo en precisión simple.

c) Considera el número $x = \dfrac{1}{3}$.

i) (1 punto) ¿Cuál es la representación de x en el sistema binario?

ii) (1 punto) Considerando precisión simple, ¿cuál es el número de punto flotante más cercano a x si se usa truncamiento?

2 Sea A una matriz simétrica positiva definida de tamaño $n \times n$.

a) (2 puntos) Demuestra que A se puede descomponer en la forma:

$$A = l_1 d_1 l_1^t + l_2 d_2 l_2^t + \ldots + l_n d_n l_n^t$$

donde cada l_i es un vector columna y d_i es un escalar.

b) (2 puntos) Verifica el resultado anterior para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3 Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. La inversa de $B = I - vw^T$ tiene la forma $B^{-1} = I - cvw^T$.

a) (1 punto) Determina el valor de c

b) (1 punto) ¿Bajo qué condición sobre v y w la matriz B está mal condicionada?

c) (1 punto) Da una condición, no trivial, suficiente sobre v y w para que la matriz B sea ortogonal.

4 En este ejercicio se busca encontrar la raíz cuadrada de un número positivo R utilizando el **método de Newton**.

a) (1 punto) Deriva la expresión recursiva para el término x_{n+1} de la sucesión correspondiente.

b) (2 puntos) Demuestra que $x_{n+1}^2 - R = \left(\dfrac{x_n^2 - R}{2x_n} \right)^2$

c) (1 punto) Interpreta el resultado del inciso anterior en términos de la convergencia cuadrática.

5 **Aplicación del teorema del punto fijo a la ecuación de Kepler**

La ecuación de Kepler en Mecánica Celeste, que describe la relación entre la anomalía media x, la anomalía excéntrica y y la excentricidad ϵ de una órbita, está dada por:

$$x = y - \epsilon \sin(y)$$

Dada la excentricidad ϵ y un valor de x en el intervalo $[0, \pi]$, reescribe la ecuación como una ecuación de punto fijo en la forma $y = g(y)$.

Luego:

a) (2 puntos) Demuestra que la función $g(y)$ es una contracción para $0 \leq \epsilon < 1$.

b) (1 punto) Justifica que la ecuación de Kepler tiene una única solución y para x en $[0, \pi]$.

6 (2 puntos) Sea f una función diferenciable sobre el intervalo finito $[1, 2]$. Determina los pesos ω_i de la regla de cuadratura

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \omega_0 f(1) + \omega_1 f(2) + \omega_2 f'(1) + \omega_3 f'(2)$$

de modo que sea exacta para polinomios del grado más alto posible.

7 (1 punto) Dada una matriz A con primer columna a_1, explica cómo construir una matriz de Householder H, tal que Ha_1 sea un múltiplo del vector canónico.

8 (1 punto) Explica cómo las rotaciones de Givens utilizan una matriz ortogonal $G(i, j, \theta)$, que actúa en las filas i y j para hacer cero un elemento de la matriz.

9 (2 puntos) Considera la partición del intervalo $[-1, 5]$ definida por los siguientes nodos:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5.$$

Los valores de cierta función f, así como sus derivadas en estos nodos son:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
-1	2	1
0	1	-1
2	3	2
5	4	0

Construye el *spline* cúbico de Hermite que aproxima a f en el intervalo dado.