Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM
Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
(Métodos en Diferencias)
Semestre 2025 - 1
Examen General

1 Instrucciones

Se tendrá 5 horas para entregar su examen a partir de la hora de inicio. Entregue en hojas por separado sus respuestas indicando los pasos para llegar a la respuesta final. Se tiene que escribir en limpio y claro todos los pasos de su razonamiento matemático. En la esquina superior derecha de cada página, escriba su nombre y enumere las páginas. Los exámenes que no cumplan con las instrucciones, o que no sean legibles no serán calificados.

2 Problemas

Problema 1. Considera el siguiente método implícito de 3 pasos:

$$y_{n+3} = y_n + h\left[\mu f(y_{n+3}, t_{n+3}) + \frac{9}{8}f(y_{n+2}, t_{n+2}) + \frac{9}{8}f(y_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{3}{8}f(y_n, t_n)\right]$$

con coeficiente desconocido μ designado para resolver numéricamente el método

$$\begin{cases} y'(t) &= f(y,t), \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

a) Determina el valor de μ que hace el esquema consistente.

b) Determina el orden del esquema consistente mediante el error de truncamiento.

c) ¿Es el esquema consistente convergente?

Problema 2. Existe una familia de 1 parámetro de métodos Runge Kutta de 2 etapas para resolver la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) $y'(t) = f(y(t), t)$. Tomando un tamaño de paso k, y el parámetro α arbitrario, los métodos se escriben de la siguiente manera

$$\begin{cases} F_0 &= f(y_n, t_n), \\ F_1 &= f(y_n + \alpha k F_0, t_n + \alpha k), \\ y_{n+1} &= y_n + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) kF_0 + \frac{1}{2\alpha} kF_1. \end{cases}$$

a) Verifica que todos esos métodos, para cualquier valor de α, son de segundo orden.

b) Muestra que todos esos métodos, para cualquier α, tienen exactamente el la misma región de estabilidad absoluta.

c) Verifica que esta región, intersectada con el eje real negativo, se extiende exactamente sobre el intervalo $[-2, 0]$.

Problema 3.

a) Determina la región de estabilidad absoluta para el método leap-frog $y_{n+1} - y_{n-1} = 2kf(y_n, t_n)$ para resolver la EDO $y'(t) = f(y(t), t)$, donde k es el tamaño de paso.

b) Determina el orden de aproximación del método leap-frog.

c) Considera la siguiente variación al método leap-frog

$$y_{n+1} - y_{n-1} = k\left(\frac{7}{3}f(y_n, t_n) - \frac{2}{3}f(y_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{1}{3}f(y_{n-2}, t_{n-2})\right).$$

Demuestra que si z está en la región de estabilidad absoluta, entonces la parte real de z es estrictamente positiva ($\mathrm{Re}(z) > 0$) o $z = 0$. *Sugerencia:* Parametriza la curva que contiene a la frontera y verifica lo anterior. Dicha curva se muestra en la Figura 1.

d) De la parte (c), se deduce que la región se estabilidad excluye al semi-plano complejo izquierdo. ¿Qué nos dice esto sobre el método? ¿Se puede usar este método para resolver $y' = y$ o $y' = -y$? Explica.

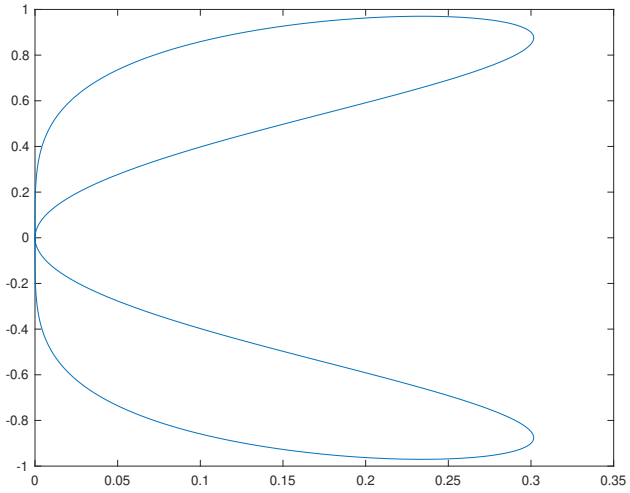

Figure 1: Curva para inciso c).

Problema 4. Considera el método multi-paso

$$y_{n+1} = (1-a)y_n + ay_{n-1} + \frac{k}{12}\left\{(5-a)f(y_{n+1}, t_{n+1}) + 8(1+a)f(y_n, t_n) + (5a-1)f(y_{n-1}, t_{n-1})\right\}$$

para resolver la EDO $y'(t) = f(y(t), t)$. Aquí k es el tamaño de paso y a es un parámetro real.

a) Muestra que el método arriba mencionado tiene error de truncamiento $O(k^3)$ para toda a.

b) Encuentra a de tal forma que el método tenga error de truncamiento $O(k^4)$ y revisa si el método satisface la condición de la raíz.

c) ¿Es el método para la condición b) A-estable?

Problema 5. Considera el método Adams-Bashforth de orden 4 (AB4) para resolver $y'(t) = f(y(t), t)$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k}{24}\left(55f(y_n, t_n) - 59f(y_{n-1}, t_{n-1}) + 37f(y_{n-2}, t_{n-2}) - 9f(y_{n-3}, t_{n-3})\right).$$

a) Aplica la condición de la raíz a este método. Explica tu análisis y la información que nos da sobre el método.

b) Identifica la región de estabilidad absoluta en la gráfica de abajo y encuentra una parametrización de la curva.

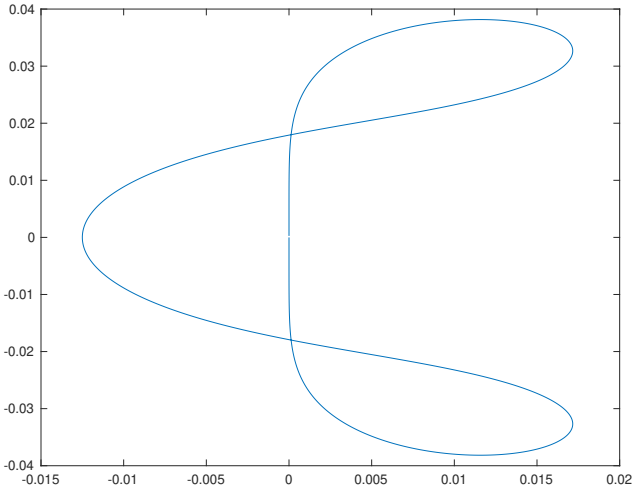

Figure 2: Figura para el inciso b).