



POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Complejo

Enero 2025
Semestre 2025-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
 - El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.
-

En lo que sigue denotamos $D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

1. (6 puntos) Sea f una función holomorfa en la región Ω que contiene al disco unitario cerrado. Demuestra que si f cumple que:
 - (a) no se hace cero en el interior del círculo unitario,
 - (b) $|f(z)| = 1$ para todo z en el círculo unitario, $|z| = 1$,entonces f es una función constante en todo Ω .

2. (6 puntos) Calcula la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{z+i}{z^2+2iz-4} dz$$

donde $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por $\gamma(t) = -(1+i) + 2e^{i\pi t}$.

3. (6 puntos) Si $f : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función tal que f^2 y f^3 son holomorfas en $D_1(0)$ prueba que f también es holomorfa en $D_1(0)$.
4. (6 puntos) Prueba que si $f : D_r(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad no removible en z_0 , entonces e^f tiene una singularidad esencial en z_0 .
5. (6 puntos) Sean Ω y G abiertos del plano complejo, $f : \Omega \rightarrow G$ holomorfa, y $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^2 en G .

- (a) Demuestra que

$$\Delta\varphi \circ f = ((\Delta\varphi) \circ f)|f'|^2. \quad (1)$$

- (b) Concluye que para $p > 1$,

$$\Delta|f|^p = p|f|^{p-2}|f'|^2. \quad (2)$$

- (c) Si $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica, prueba que $u \circ f$ es armónica en Ω .
6. (6 puntos) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y por dA_ζ denotamos la medida de área en $\mathbb{C}$.
- (a) Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $a \in \Omega$ y $r > 0$ son tales que $\overline{D}_r(a) \subset \Omega$, prueba que

$$f(a) = \frac{1}{i\pi r^2} \iint_{D_r(a)} f(\zeta) dA_\zeta. \quad (3)$$

- (b) Demuestra que si $K \subset \Omega$ es un compacto, entonces para cualquier $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $f \in L_2(\Omega)$ (es decir, tal que $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\iint_\Omega |f(\zeta)|^2 dA_\zeta\right)^{\frac{1}{2}}$ es finito), se tiene

$$\max_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} \rho_K} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (4)$$

donde $\rho_K = \text{dist}(K, \partial\Omega)$.

- (c) Demuestra que si f es entera y $\iint_{\mathbb{C}} |f(\zeta)|^2 dA_\zeta$ es finito, entonces $f \equiv 0$.
- (d) Si $(f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C})_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones holomorfas en Ω y acotada en la norma de $L_2(\Omega)$, prueba que es una sucesión normal, esto es, que posee una subsucesión que converge uniformemente en compactos a una función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.