POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Funcional

Enero 2025
Semestre 2025-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá numerar cada hoja.

---

1. (6 puntos) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normaldo. Demuestra que X es de dimensión finita si y sólo todo subespacio vectorial de X es cerrado.

2. (6 puntos) Sean X, Y espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ un operador compacto. Supongamos que $\dim(X) = \infty$. Prueba que existe una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\|u_n\| = 1$ para toda n y $\lim_{n\to\infty} \|Tu_n\| = 0$.

3. (6 puntos)

   (a) Sea $Y \subset X$ un subespacio de un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Sea $u \in X$ tal que
   $$\delta = \operatorname{dist}(u, Y) := \inf_{v\in Y} \|u - v\| > 0.$$
   Demuestra que existe un funcional lineal continuo, $f \in X^*$, tal que $f(u) = \delta$, $\|f\|_* = 1$ y $f(v) = 0$ para todo $v \in Y$.

   (b) Demuestra que si el espacio X es reflexivo entonces todo funcional lineal acotado sobre X alcanza su norma, es decir, para todo $f \in X^*$ existe un elemento $u \in X$ con $\|u\| = 1$ tal que $f(u) = \|f\|_*$.

4. (6 puntos) Prueba que toda sucesión débilmente convergente en ℓ_1 es fuertemente convergente.

   (*Nota:* Ésta es una notable propiedad del espacio ℓ_1: convergencia débil $\Rightarrow$ convergencia fuerte. Puedes usar el hecho de que ℓ_∞ es el dual de ℓ_1, es decir, son espacios isomorfos, $\ell_\infty \cong \ell_1^*$.)

5. (6 puntos) Dado un espacio de Hilbert H por $\mathbb{B}(H)$ denotamos al conjunto de operadores lineales de H en H que son acotados. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in B(H)$. Prueba que

(a) A es compacto si y sólo si para toda base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\{e_1,\ldots,e_n\}^{\perp},\|f\|\leq 1} \|Af\| \to 0.$$

(b) Si $A \geq 0$ y A es compacto, entonces $A^{1/2}$ es compacto.

(c) Si $0 \leq A \leq B$ y B es compacto, entonces A es compacto.

6. (6 puntos) Sea $A \in B(H)$ un operador normal. Prueba que

(a) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$

(b) Existen operadores autoadjuntos P y Q, con P positivo tal que

$$PQ = QP \quad \text{y} \quad A = Pe^{iQ}.$$