POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis Real

Enero 2025
Semestre 2025-1

Puntos: 36 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja, su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja y deberá enumerar todas la hojas.

---

1. (6 puntos) Sabemos que si (X, Σ) es un espacio medible, $A \subset X$ es un conjunto propio no vacío y no necesariamente $A \in \Sigma$ y $h : A \to \mathbb{R}$ es una función medible de (A, Σ_A) a $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$, donde $\Sigma_A = \{A \cap F \mid F \in \Sigma\}$ es la σ-álgebra inducida por A y $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ son los borelianos de $\mathbb{R}$, entonces h se puede extender a todo X como una función $\tilde{h} : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ que sea medible.

   Sean (X, τ) y (Y, η) dos espacios topológicos, y sea $A \in \tau$ no vacio y distinto de X y sea $f : (A, \tau_A) \to (Y, \eta)$ una función continua con respecto a la topología relativa $\tau_A = \{U \cap A \mid U \in \tau\}$. Da un contraejemplo de espacios topológicos y de un conjunto abierto A, para ver que si $f : (A, \tau_A) \to (Y, \eta)$ es una función continua, no se puede necesariamente extender a todo X como función continua, de hecho, a veces no se puede ni extender ni siquiera a un sólo punto x que no esté en A.

2. (6 punto) Sea X un conjunto no vacío, sea (Y, Σ) un espacio medible y sea $T : X \to Y$ una función arbitraria. Defina

$$\mathcal{T}^{-1}(\Sigma) := \{T^{-1}(B) \subset X \mid B \in \Sigma\}. \tag{1}$$

   (a) Prueba que $\mathcal{T}^{-1}(\Sigma)$ es una σ-álgebra en X y que es la σ-álgebra más pequeña en X que hace medible a T.

   (b) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Prueba que f es medible de $(X, \mathcal{T}^{-1}(\Sigma))$ en $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ si y sólo si existe una función $g : Y \to \mathbb{R}$ medible de (Y, Σ) en $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$, tal que $f(x) = (g \circ T)(x)$, para toda $x \in X$.
   Sugerencia: Ver que si $T(u) = T(v)$ para algunas $u, v \in X$ entonces $f(u) = f(v)$

3. (6 puntos) Di si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Si son verdaderas, pruébalas, si son falsas dá un contraejemplo.

   Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$, donde $\mathcal{L}$ denota la Σ-álgebra de Lebesgue y m denota la medida de Lebesgue.

(a) Si $f_n(x) \geq 0$ para todo x y f_n converge uniformemente a f entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n dm = \int f dm.$$

(b) Si $f_n(x) \geq 0$ para todo x y $\lim_{n\to\infty} \int f_n dm = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ casi donde sea.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ casi donde sea y $\lim_{n\to\infty} \int |f_n| dm = \int |f| dm$ entonces $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

4. (6 puntos) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea f una función real, Σ-medible. Sea $D \in \Sigma$ que satisface $0 < \mu(D) < \infty$ y tal que existe $M > 0$ tal que para toda $x \in D$, $|f(x)| \leq M$.

   (a) Si $\int_D f d\mu = M\mu(D)$ entonces $f = M$ casi donde sea en D.

   (b) Si $f < M$ casi donde sea en D entonces $\int_D f d\mu < M\mu(D)$.

5. (6 puntos) Sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f|^p d\mu < \infty, \; p > 0.$$

   Prueba que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ casi en todas partes.

6. (6 puntos) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ uniformemente contínua.

   Prueba que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   Sugerencia: Si el límite no es cero, puedes encontrar (explica) $\epsilon > 0$ y una suceción creciente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n+1} > 1 + x_n$ y $|f(x_n)| > \epsilon$.

   Analiza $\int_E |f| d\mu$ con $E = \cup_{n=1}^{\infty} (x_n - \delta, x_n + \delta)$, donde $0 < \delta < 1/2$ es tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$ si $|x - y| < \delta$.