Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre 2025-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 60 puntos.

1. (20 puntos) Aplique el teorema de Poincaré-Bendixson para demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - \alpha y^2), \end{aligned}$$

tiene una órbita periódica y determine los límites de la región anular alrededor del origen para $\alpha \geq 1$. ¿Qué ocurre para $\alpha < 1$?

2. (20 puntos) Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x\frac{f(r)}{r}, \\ \dot{y} &= x + y\frac{f(r)}{r}, \end{aligned}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$, $r \geq 0$ y $f(r)$ es una función suave.

(i) Demuestre que este sistema tiene soluciones periódicas correspondientes a los ceros de $f(r)$.

(ii) Determine la dirección de movimiento a lo largo de las trayectorias cerradas.

(iii) Analice el caso especial, $f(r) = r\cos(r/2)$.

(iv) Dibuje el retrato fase correspondiente con los ciclos límites del sistema.

3. (20 puntos) Sea $x(t)$ la densidad de maíz al tiempo t. Considerando que el maíz es cosechado a una razón μ constante y que su dinámica está determinada por

$$\dot{x} = f(x;\mu),$$

donde $f(x;\mu) = rx(1 - \frac{x}{k}) - \mu$, con k es la capacidad de carga y r es la razón de crecimiento intrínseco.

(i) Sea x^* tal que $f(x^*;\mu) = 0$. Encuentre $\mu_0 = \mu(k,r)$ para el cual $f'(x^*;\mu) > 0\,(< 0)$ si $\mu > \mu_0\,(\mu < \mu_0)$.

(ii) Bosqueje los puntos de equilibrio indicando su estabilidad al variar μ continuamente.

(iii) Discuta que ocurre al cosechar maíz desmesuradamente.

4. (10 puntos) Analice la estabilidad en sentido de Lyapunov del origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(y^2 - 1), \\ \dot{y} &= y(x^2 - 1). \end{aligned}$$

5. (15 puntos) Considere que en ausencia de depredadores (D), la población de presas (P) sigue un modelo logístico y los depredadores todavía siguen un modelo Maltusiano como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= aP - eP^2 - bPD, \\ \frac{dD}{dt} &= -cD + fPD. \end{aligned} \tag{1}$$

Grafique el espacio fase para varias soluciones alrededor de los puntos de equilibrio suponiendo que todos los parámetros son positivos.

6. (15 puntos) La ecuación de la forma

$$\ddot{y} + q(t)y = 0 \tag{2}$$

con $q(t)$ una función periódica en $\mathbb{R}$, con periodo positivo T, se le conoce como la ecuación de Hill. Escriba la ecuación como un sistema lineal y explique por qué los multiplicadores de Floquet satisfacen $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$.