Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Semestre 2025-1

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y escribir su nombre en cada hoja.
- La calificación mínima aprobatoria es 40 puntos.

1. (10 puntos) Aplique el método de características para resolver la siguiente ecuación semilineal, donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante distinta de cero:

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= u^2, && x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \cos x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución obtenida, ¿presenta explosión a tiempo finito?

2. (10 puntos) Aplique el método de separación de variables para resolver el siguiente problema *mixto*, es decir, con valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && x \in (0,1),\ t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), \quad u_t(x,0) &= 0, && x \in (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, && t > 0. \end{aligned}$$

3. (10 puntos) Muestre que para la dimensión espacial $n = 2$, la función

$$v = \frac{1}{8\pi} |x - \xi|^2 \log |x - \xi|$$

es una solución fundamental del operador $\triangle^2 = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)^2$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$ fijo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado y conexo. Usando las identidades de Green, muestre que para $u \in C^4(\bar{\Omega})$ y $\xi \in \Omega$

$$u(\xi) = \int_\Omega v \triangle^2 u dx - \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{d \triangle u}{dn} - \triangle u \frac{dv}{dn} + \triangle v \frac{du}{dn} - u \frac{d \triangle v}{dn} \right) dS.$$

4. (10 puntos) Sea el operador $L = \triangle + c$ en $\mathbb{R}^3$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Encuentre todas las soluciones de $Lu = 0$ con simetría esférica. Pruebe que

$$K(x, \xi) = -\frac{\cos\left(\sqrt{c}\, |x - \xi|\right)}{4\pi |x - \xi|},$$

es una solución fundamental para L con polo en $\xi \in \mathbb{R}^3$. Muestre que cualquier solución u de $Lu = 0$ de clase $C^2(\bar{\Omega})$ que se anula en la frontera $\partial\Omega$, también se anula en Ω si $c < 0$. Además, demuestre que para $c > 0$ existen soluciones que se anulan en la frontera pero no en el interior.

5. (10 puntos) Sea la dimensión espacial $n = 3$ y sea Ω la bola abierta con centro en el origen y radio π:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| < \pi\}.$$

Muestre que las soluciones $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de $\triangle u + u = f(x)$ en Ω que se anulan en la frontera $\partial\Omega$ pueden existir sólo si

$$\int_\Omega f(x) \frac{\sin |x|}{|x|} \, dx = 0.$$

Aquí suponemos que $f \in C(\bar{\Omega})$.

6. (10 puntos) Use la transformada de Laplace, $\mathcal{L}$, para resolver la siguiente ecuación del calor con condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 1, \quad x > 0, \\ \lim_{x\to\infty} u(x,t) &= 1, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Sugerencia: Usar el hecho de que la transformada inversa de la siguiente función se puede expresar en términos de la *función error*,

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{\exp(-a\sqrt{s})}{s}\Big) = \operatorname{errfn}\Big(\frac{a}{2\sqrt{t}}\Big), \quad a > 0.$$