Examen General de Estadística

Semestre 2025-1 (Enero 2025)

Instrucciones: Deberá responder todas las preguntas justificando sus respuestas.
Se requieren 4/6 de calificación para aprobar el examen.
Tiempo máximo de examen: 5 horas (9:00-14:00 hrs.).

Inferencia Estadística

1. Sea $\mathcal{F} = \{f_\lambda : \lambda \in (0, \infty)\}$ con $f_\lambda(x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$. Encuentre un estimador insesgado de varianza mínima para λ.

2. Considere la familia paramétrica $\mathcal{F} = \{f_p : p \in (0, 1)\}$ con $f_p \sim \text{Ber}(p)$.

(a) Proponga un estimador de p basado en el método de los momentos.

(b) Utilice la desigualdad de Hoeffding para dar un intervalo de confianza **no asintótico** para el estimador propuesto en (a).

3. Sea $\mathcal{F} = \{f_p : p \in (0, 1)\}$ con $f_p(x) = (1 - p)x^{-p}$ para $x \in (0, 1)$.

(a) Demuestre que $\hat{q} := \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \log(X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{-1}{1 - p} =: q$.

(b) Demuestre que $\sqrt{n}(\hat{q} - q) \xrightarrow{d} N\big(0, (1 - p)^{-2}\big)$.

(c) Encuentre una función g tal que $g(q) = p$ y $\dfrac{\sqrt{n}}{1 - p}\big(g(\hat{q}) - p\big) \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Justifique la convergencia en distribución utilizando el método delta.

(d) Defina $\hat{p} = g(\hat{q})$ y utilice el teorema de Slutsky para concluir que $\dfrac{\sqrt{n}}{1 - \hat{p}}(\hat{p} - p) \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

(e) Encuentre un intervalo de confianza **asintótico** para p utilizando el inciso anterior.

Inferencia Bayesiana

4. Supongamos que tienes tu propia compañía de transporte, con un gran número de camiones, y que los camiones se descomponen de manera aleatoria a lo largo del tiempo. El número de descomposturas durante un intervalo de tiempo t sigue una distribución Poisson con media λt, donde el parámetro λ es la tasa diaria de descomposturas. Los valores posibles de λ son $\{0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$ y sus respectivas probabilidades iniciales son $\{0.10, 0.20, 0.30, 0.20, 0.15, 0.05\}$.

(a) Encuentra la distribución final de λ si se descomponen 12 camiones en un periodo de seis días.

(b) Dada esta información, calcula la probabilidad de que no se descomponga algún camión durante los siguientes seis días.

5. Sea X una variable aleatoria (univariada) que representa algún atributo de interés de una población finita. Por ejemplo, X puede ser el ingreso mensual de los individuos en la población. Supongamos que la población consta de N individuos, así que lo más que podemos observar es $\{X_1, \ldots, X_N\}$ (en el caso de un censo).

Supongamos que la distribución inicial de $\{X_1, \ldots, X_N\}$ puede escribirse como

$$p(x_1, \ldots, x_N) = \int \prod_{i=1}^{N} p(x_i|\theta)\, p(\theta)\, d\,\theta,$$

para algunas distribuciones $p(x|\theta)$ y $p(\theta)$.

a) Supongamos que se observa una muestra de $\{X_1, \ldots, X_N\}$, digamos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ con $n < N$. Encuentra la distribución final

$$p(x_{n+1}, \ldots, x_N | x_1, \ldots, x_n)$$

a partir de $p(\theta)$, la muestra observada y la función de densidad de las variables no observadas.

b) Si en el inciso anterior suponemos que $p(x|\theta) = N(x|\theta, 1)$ y $p(\theta) = N(\theta|\mu, 1/\tau)$, donde la media μ y la precisión τ son conocidas, encuentra

$$p(x_{n+1}|x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{y} \qquad p(x_{n+1}, x_{n+2}|x_1, \ldots, x_n).$$

c) Continuando con el inciso anterior, encuentra la media inicial y la media final de $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_m$ una muestra de variables aleatorias i.i.d. de una distribución normal $N(x|\theta, 1)$ y supón que la distribución inicial de θ está dada por $p(\theta) = N(\theta|\mu, 1/\tau)$, donde τ denota al parámetro de precisión.

a) Encuentra el estimador bayesiano de θ utilizando la función de pérdida

$$L(a, \theta) = \left(a - \theta^2\right)^2.$$

b) Encuentra el estimador bayesiano de θ utilizando la función de pérdida

$$L(a, \theta) = \left(e^a - e^\theta\right)^2.$$

c) Habiendo resuelto los dos incisos anteriores, ¿cuál de las dos funciones de pérdida tiene más sentido para ti? Argumenta tu respuesta.